UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Asignatura: MATEMÁTICAS I

PRIMER PARCIAL

GRUPO A

CURSO 15-16

18 enero 2016

ENUNCIADO Y RESUELTO

CUESTIONES. [0.25 p. cada una] Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

C1. Deducir para qué valores de α la siguiente matriz es invertible

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

C2. ¿Pueden constituir los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ un sistema generador de $\mathbb{R}^3$? Explica razonadamente por qué sí o por qué no. En caso afirmativo dar un ejemplo.

C3. Definir cuándo una matriz cuadrada A es invertible. Dar dos condiciones equivalentes a la definición anterior de que A es invertible.

C4. ¿Puede ser inyectiva una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$? ¿Por qué? Dar un ejemplo en caso afirmativo.

SOLUCIONES:

C1. La matriz no puede ser invertible, ya que es una matriz rectangular (no es cuadrada).

C2. 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ pueden ser un sistema generador y también pueden no serlo. Lo serán si son linealmente independientes. Por ejemplo, se puede tomar la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

C3. Una matriz cuadrada A es invertible cuando existe otra matriz cuadrada B, tal que $AB = BA = Identidad$. A esta matriz B, si existe, se le suele denotar por A^{-1}. Dos condiciones que nos aseguran cuando una matriz cuadrada es invertible (y que entre ambas son equivalentes) es que la matriz A tenga rango máximo o que $|A| \neq 0$.

C4. La respuesta es que NO, ya que sabemos que $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, por lo que si f fuese inyectiva, habría de ser $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$, por lo que $\dim(\ker(f)) = 0$, y entonces $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, lo que es imposible, ya que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ (y como mucho su dimensión podría ser 2).

PROBLEMA 1. [2 PUNTOS] Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, y se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que a cada polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ le asigna el vector $(p(0), p(1), p(2), p(3))$. Se pide:

a. Calcular la matriz asociada a f en las respectivas bases canónicas (Considerar $\{1, x, x^2\}$ como la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$).

b. Obtener el valor de $f(2x^2 - x + 1)$.

c. Hallar $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$. Clasificar f.

SOLUCIONES:

a. La 1ª columna de la matriz viene dada por las imágenes del 1er vector de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ (y lo mismo para la 2da y 3ra columna). Así, y como

$$\text{Si } p(x) = 1 \Rightarrow f((1)) = (p(0),p(1),p(2),p(3)) = (1,1,1,1)$$
$$\text{Si } p(x) = x \Rightarrow f((x)) = (p(0),p(1),p(2),p(3)) = (0,1,2,3)$$
$$\text{Si } p(x) = x^2 \Rightarrow f((x^2)) = (p(0),p(1),p(2),p(3)) = (0,1,4,9)$$

la matriz viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

b. Se tiene que

$$f(2x^2 - x + 1) = (p(0),p(1),p(2),p(3)) = (1,2,7,16)$$

que es el mismo resultado que si hacemos

$$f(2x^2 - x + 1) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c. Sabemos que

$$\mathrm{Im}(f) =< (1,1,1,1),(0,1,2,3),(0,1,4,9) >$$

y como estos 3 vectores son linealmente independientes, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. De esta forma, y puesto que

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$$

habrá de ser $\ker(f) = \{0\}$; por lo que f será inyectiva y no es suprayectiva (ya que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \neq \dim \mathbb{R}^4 = 4$).

PROBLEMA 2. [2 PUNTOS] Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo y A su matriz asociada. Sabiendo que el vector $(0,2,1)$ se transforma en $(1,1,0)$ y que 1 es un valor propio de A con subespacio vectorial propio asociado $< (1,1,0),(1,0,1) >$, se pide:

a. Calcular todos los valores propios de A y sus subespacios propios asociados.

b. Justificar porqué A es diagonalizable, y establecer la matriz de paso P y la matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

c. Determinar A^n.

SOLUCIONES:

a. Supongamos que A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

y exigiendo que se cumplan las hipótesis del enunciado, es decir, haciendo que $f(0,2,1) = (1,1,0)$ así como que $f(1,1,0) = 1 \cdot (1,1,0)$ y que $f(1,0,1) = 1 \cdot (1,0,1)$, se llega a

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene por valores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de donde

$$2\lambda^2 - \lambda - \lambda^3 = 0$$

que tiene por soluciones $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 0$ (simple); además sabemos que $S_{\lambda_1} =< (1,1,0),(1,0,1) >$, por lo que solo necesitamos obtener S_{λ_2} :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de donde

$$S_{\lambda_2} = \{(-y,y,y)\} =< (-1,1,1) >$$

b. La matriz es diagonalizable ya que la dimensión de cada subespacio vectorial propio coincide con la multiplicidad de cada valor propio. Además, se tiene que existen P y D tal que $P^{-1}AP = D,$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{y } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Sabemos que

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} =\ldots= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

:

PROBLEMA 3. [2 PUNTOS] En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se considera el producto escalar definido por

$$(x,y,z,t) \bullet (x',y',z',t') = xx' + yy' + zz' + 2tt'$$

y el subespacio dado por $S = <(1,0,-1,0),(0,2,3,1)>$. Se pide:

a. Obtener una base ortonormal para $S^{\perp}$.

b. Expresar el vector $(3,0,3,0)$ como suma de un vector de S y otro de $S^{\perp}$.

SOLUCIONES:

a. En primer lugar hallamos una base para $S^{\perp}$:

$$(x,y,z,t) \in S^{\perp} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z,t) \bullet (1,0,-1,0) = 0 \\ (x,y,z,t) \bullet (0,2,3,1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - z = 0 \\ 2y + 3z + 2t = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = x;\ t = \frac{-2y-3x}{2}$$

por lo que

$$S^{\perp} = \left\{ \left(x,y,x,\frac{-2y-3x}{2} \right) \right\} = <(1,0,1,-3/2),(0,1,0,-1)>$$

Aplicaremos a estos dos vectores las ecuaciones del método de ortogonalización de G-S:

$$u_1 = e_1 = (1,0,-1,-3/2)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \bullet e_2}{u_1 \bullet u_1} u_1 = (0,1,0,-1) - \frac{(1,0,-1,-3/2) \bullet (0,1,0,-1)}{(1,0,-1,-3/2) \bullet (1,0,-1,-3/2)} (1,0,-1,-3/2) =$$

$$= (0,1,0,-1) - \frac{3}{13/2} (1,0,-1,-3/2) = (-6/13,1,6/13,-4/13)$$

Ahora solo hemos de dividir cada vector por su módulo para obtener la base ortonormal: Como

$$\| u_1 \| = \sqrt{u_1 \bullet u_1} = \sqrt{(1,0,-1,-3/2) \bullet (1,0,-1,-3/2)} = \sqrt{13/2}$$

$$\| u_2 \| = \sqrt{u_2 \bullet u_2} = \sqrt{(-6/13,1,6/13,-4/13) \bullet (-6/13,1,6/13,-4/13)} = \sqrt{\frac{257}{169}} = \frac{\sqrt{257}}{13}$$

la base ortonormal viene dada por

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{13}} (1,0,-1,-3/2), \frac{13}{\sqrt{257}} (-6/13,1,6/13,-4/13) \right\}$$

b. Si se considera $u \in S$ y $v \in S^{\perp}$, se trata de poner

$$(3,0,3,0) = u + v = \alpha(1,0,-1,0) + \beta(0,2,3,1) + \gamma(1,0,1,-3/2) + \delta(0,1,0,-1)$$

Los coeficientes los obtendremos multiplicando escalarmente esta igualdad por los dos vectores de la base de S y por los dos vectores de la base de $S^{\perp}$: En primer lugar multiplicamos por los de S

$$(3,0,3,0) \bullet (1,0,-1,0) = \alpha(1,0,-1,0) \bullet (1,0,-1,0) + \beta(0,2,3,1) \bullet (1,0,-1,0) +$$
$$+ \gamma(1,0,1,-3/2) \bullet (1,0,-1,0) + \delta(0,1,0,-1) \bullet (1,0,-1,0)$$

es decir

$$0 = 2\alpha - 3\beta$$

mientras que

$$(3,0,3,0) \bullet (0,2,3,1) = \alpha(1,0,-1,0) \bullet (0,2,3,1) + \beta(0,2,3,1) \bullet (0,2,3,1) +$$
$$+ \gamma(1,0,1,-3/2) \bullet (0,2,3,1) + \delta(0,1,0,-1) \bullet (0,2,3,1)$$

por lo que

$$9 = -3\alpha + 15\beta$$

Si multiplicamos por los dos vectores de $S^{\perp}$ y operando, se llega a

$$6 = \frac{13}{2}\gamma + 3\delta;\ 0 = 3\gamma + 3\delta$$

Resolviendo entonces estos sistemas, tendremos que

$$\alpha = 9/7;\ \beta = 6/7;\ \gamma = 12/7;\ \delta = -12/7$$

por lo que

$$u = 9/7(1,0,-1,0) + 6/7(0,2,3,1) = (9/7, 12/7, 9/7, 6/7)$$
$$v = 12/7(1,0,1,-3/2) - 12/7(0,1,0,-1) = (12/7, -12/7, 12/7, -6/7)$$

PROBLEMA 4. [1,5 PUNTOS] Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{1+2x}$, se pide:

a. Establecer la fórmula de McLaurin de grado 3 (resto en grado 4) para $f(x)$.

b. Usando el polinomio anterior, calcular una aproximación para $\sqrt[3]{3}$ estimando el error cometido.

c. Usar el polinomio anterior para obtener el valor aproximado de

$$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+2x}\, dx$$

SOLUCIONES:

a. Aplicando

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \text{Resto}$$

resulta ser

$$\sqrt[3]{1+2x} = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{-8/9}{2}x^2 + \frac{80/27}{3!}x^3 + \text{Resto}$$

siendo

$$\text{Resto} = \left| \frac{f^{(IV)}(c)}{4!}x^4 \right| = \left| \frac{1}{4!} \frac{-1280}{81\sqrt[3]{(1+2c)^{11}}} \right|$$

y c un valor comprendido entre 0 y x.

b. Aplicando lo anterior

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1+2\cdot 1} \approx 1 + \frac{2}{3}1 + \frac{-8/9}{2}1^2 + \frac{80/27}{3!}1^3 = \frac{139}{81} = 1.716$$

con error dado por

$$\text{Resto} = \left| \frac{1}{4!} \frac{-1280}{81\sqrt[3]{(1+2c)^{11}}} \right| \le \left| \frac{1}{4!} \frac{-1280}{81\sqrt[3]{(1+2\cdot 0)^{11}}} \right| = 0.658$$

(Nota: el verdadero valor de $\sqrt[3]{3}$ es 1.442).

c. Tendremos que

$$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+2x}\,dx \approx \int_0^{1/2}\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{-8/9}{2}x^2+\frac{80/27}{3!}x^3\right)dx = \ldots = \frac{371}{648}$$

PROBLEMA 5. [1,5 PUNTOS] Se pide:

a. Haciendo la sustitución $x = 2\tan(t)$, calcular

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

b. Calcular

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$$

SOLUCIONES:

a. Si hacemos $x = 2\tan(t)$, tendremos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2(1+\tan^2(t))}{4\tan^2(t)\sqrt{4\tan^2(t)+4}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{1+\tan^2(t)}}{\tan^2(t)}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{1+\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}}{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{\frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}}{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin(t)} + cte = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + cte$$

donde se ha deshecho el cambio de variable (de $x = 2\tan(t)$ resulta que $\sin(t) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$).

b. Se trata de una integral racional, donde el denominador solo tiene raíces complejas simples. Al ser el numerador una cte, la resolveremos sin más que completar cuadrados en el denominador:

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{7/4}+1} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{7}/2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{4}{7}\frac{\sqrt{7}}{2}\arctan\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{7}/2} + cte$$