Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso
Examen Final Junio. Curso 2014/2015
(02/07/2015)

(Incluye la solución de todos los ejercicios propuestos, independientemente que se examine de la asignatura completa y/o del primer o segundo parcial)

PRIMER PARCIAL

1. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$f(x,y,z) = \left(x + 3y - z,\ 2x + \lambda y,\ x - 2y + z\right)$$

   a. Determinar los valores de λ para los que f es biyectiva.
   b. Para $\lambda = 2,$ hallar una base, la dimensión y las ecuaciones implícitas del núcleo y la imagen..
   c. Para $\lambda = 2,$ hallar la matriz asociada a f cuando se considera en ambos espacios la base

$$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

   d. Para $\lambda = 2,$ hallar $f^{-1}(2,0,3)$.

SOLUCIÓN:

(a) La matriz asociada a f en bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz será biyectiva cuando su determinante sea no nulo, ya que entonces será suprayectiva (la imagen coincide con el conjunto final, al ser dim Im$(f) = 3$) y también inyectiva (ya que entonces dim ker$(f) = 0$). De esta forma, si

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Por tanto, si $\lambda \neq 1$, la aplicación será biyectiva.

(b) Para $\lambda = 2,$ la aplicación es biyectiva, por lo que es inyectiva (y así $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$) y suprayectiva (por lo que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$) .

(c) Se trata de aplicar el esquema

$$\underset{B}{\mathbb{R}^3} \to \underset{C}{\mathbb{R}^3} - > \underset{C}{\mathbb{R}^3} \to \underset{B}{\mathbb{R}^3}$$

por lo que la nueva matriz pedida será

$$M_{B,B}(f) = M_{C,B} \times M_{C,C}(f) \times M_{B,C} = M_{C,B} \times A \times M_{B,C} = M_{B,C}^{-1} \times A \times M_{B,C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) Calcular $f^{-1}(2,0,3)$ es lo mismo que calcular

$$f^{-1}(2,0,3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

aunque también podríamos resolver el sistema de ecuaciones siguiente

$$f^{-1}(2,0,3) = (x,y,z) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (2,0,3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

de donde

$$(x,y,z) = (5,-5,-12)$$

– –

2. Sea A la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a & a \\ 1-2a & 0 & 0 \\ a & a & 1-a \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $P(\lambda) = (1-\lambda)(-1+2a+\lambda)(1-2a+\lambda)$. Se pide

a. Estudiar para qué valores de a la matriz A es diagonalizable.

b. Para $a = 0$ calcular A^n.

SOLUCIÓN:

(a) A partir de la expresión del polinomio característico se observa que los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1-2a$ y $\lambda_3 = -1+2a$. Por ello, si $a = 0$ ó $a = 1$, los valores propios son $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = -1$ (simple); mientras que si $a = \frac{1}{2}$ los valores propios son $\lambda_1 = 0$ (doble) y $\lambda_2 = 1$ (simple). Por lo tanto podemos concluir que si $a \neq \{0,1,1/2\}$ la matriz es diagonalizable por tener 3 valores propios reales y distintos. Nos falta por estudiar el caso $a = \{0, 1, 1/2\}$:

- Si $a = 0$:

$$V_{\lambda_1=1} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(x,x,z)\} =< (1,1,0),(0,0,1) >$$

Análogamente obtendríamos

$$V_{\lambda_2=-1} = \{(x,-x,0)\} =< (1,-1,0) >$$

por lo que A será diagonalizable.

- Si $a = 1$:

$$V_{\lambda_1=1} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(x,-x,0)\} =< (1,-1,0) >$$

por lo que A no es diagonalizable ($\lambda_1 = 1$ es doble). Aunque no es preciso calcularlo, tendríamos que

$$V_{\lambda_2=-1} = \{(x,-x,0)\} =< (1,-1,0) >$$

- Si $a = \frac{1}{2}$:

$$V_{\lambda_1=0} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(-y-z,y,z)\} =< (-1,1,0),(-1,0,1) >$$

Análogamente obtendríamos

$$V_{\lambda_2=1} = \{(x,0,x)\} =< (1,0,1) >$$

por lo que A será diagonalizable.

(b) Para $a = 0$ hemos visto que existe P y D tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar definido por

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = 2xx' + 3yy' + zz'$$

Con esta definición, se pide:

a. Hallar una base ortonormal para el subespacio $W =< (1,2,-1),(0,-1,1) >$.

b. Determinar la proyección ortogonal del vector $(-1,2,-2)$ sobre el subespacio $U = \left\{(x,y,z);\ x-y+2z = 0\right\}$.

SOLUCIÓN:

(a) Para W : Se trata de aplicar las ecuaciones del método de G-S:

$$u_1 = e_1 = (1,2,-1)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \cdot e_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (0,-1,1) - \frac{(1,2,-1)\cdot(0,-1,1)}{(1,2,-1)\cdot(1,2,-1)}(1,2,-1) =$$

$$= (0,-1,1) + \frac{7}{15}(1,2,-1) = \left(\tfrac{7}{15},\ -\tfrac{1}{15},\ \tfrac{8}{15} \right)$$

y estos dos vectores (que son base ortogonal) serán una base ortonormal para W sin más que dividir a cada uno por su respectivo módulo, siendo:

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1 \cdot u_1} = \sqrt{(1,2,-1)\cdot(1,2,-1)} = \sqrt{15}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2 \cdot u_2} = \sqrt{\left(\tfrac{7}{15},\ -\tfrac{1}{15},\ \tfrac{8}{15} \right) \cdot \left(\tfrac{7}{15},\ -\tfrac{1}{15},\ \tfrac{8}{15} \right)} = \sqrt{\frac{11}{15}}$$

(b) Se trata de expresar $v = (-1,2,-2)$ en la forma $u+w$, donde $u \in U$, y $w \in U^{\perp}$. Así, como

$$U = \left\{(x,y,z);\ x-y+2z = 0\right\} = \{(y-2z,y,z)\} =< (1,1,0),(-2,0,1) >$$

será

$$\text{Si } (x,y,z) \in U^{\perp} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z)\cdot(1,1,0) = 0 \\ (x,y,z)\cdot(-2,0,1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+3y = 0 \\ -4x+z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(x, -\frac{2}{3}x, 4x\right) \Rightarrow U^{\perp} =< \left(1,-\frac{2}{3},4\right) >=< w >$$

Entonces se trata de expresar

$$v = (-1,2,-2) = \alpha(1,1,0) + \beta(-2,0,1) + w$$

y la proyección ortogonal pedida será $u = \alpha(1,1,0) + \beta(-2,0,1)$.

Para determinar α y β, multiplicaremos escalarmente la igualdad anterior por los dos vectores de W :

$$(-1,2,-2) \bullet (1,1,0) = \alpha(1,1,0) \bullet (1,1,0) + \beta(2,1,3) \bullet (1,1,0) + w \bullet (1,1,0)$$

$$(-1,2,-2) \bullet (-2,0,1) = \alpha(1,1,0) \bullet (-2,0,1) + \beta(-2,0,1) \bullet (-2,0,1) + w \bullet (-2,0,1)$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 = 5\alpha + 7\beta + 0 \\ 2 = -4\alpha + 9\beta + 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = \frac{266}{365}, \beta = \frac{26}{73}$$

por lo que la proyección será

$$u = \alpha(1,1,0) + \beta(-2,0,1) = \frac{266}{365}(1,1,0) + \frac{26}{73}(-2,0,1) = \left(\frac{6}{365}, \quad \frac{266}{365}, \quad \frac{26}{73} \right)$$

(Notemos que en este apartado no es preciso obtener el vector w que genera $U^{\perp}$, sino que es suficiente con saber que al multiplicarlo escalarmente por los vectores de U se obtiene 0).

_ _

4. Calcular las siguientes primitivas :

$$a) \int \frac{\sqrt{2-3x}}{x} dx \qquad b) \int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+6x+1}}$$

(Nota: En (b) completar cuadrados)

SOLUCIÓN:

(a) Realizamos el cambio de variable $t^2 = 2 - 3x$. Así

$$t^2 = 2-3x \Rightarrow \sqrt{2-3x} = t \text{ y } x = \frac{2-t^2}{3} \Rightarrow dx = -\frac{2t}{3}dt.$$

Sustituyendo todo en la integral

$$\int \frac{\sqrt{2-3x}}{x} dx = \int \frac{t}{\frac{2-t^2}{3}} \left(-\frac{2t}{3}\right) dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-2} dt = 2\int \left(1 + \frac{2}{t^2-2}\right) dt =$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{t-\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{t+\sqrt{2}} \right) dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(t-\sqrt{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(t+\sqrt{2}\right) \right) + Cte$$

y sólo hemos de deshacer el cambio de variable.

(b) Si completamos cuadrados (tal y como nos indica el enunciado), observamos que se trata de una integral tipo arcsin( ) :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+6x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2-(3x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{3} \arcsin\left(\frac{3x-1}{\sqrt{2}}\right) + Cte$$

– –

5. a. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)$$

b. Hallar un polinomio de McLaurin de grado 3 para la función $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Utilizar dicho polinomio para calcular $f(0.05)$. ¿Qué error se comete en esta aproximación?

SOLUCIÓN:

(a) El límite se puede poner

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right) = \lim_{x\to 0} \log\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^{1/x}$$

por lo que si nos fijamos solo en $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^{1/x}$ se trata una indeterminación de la forma 1^∞. Resolvamos ésta:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1+x^2}{1+x}-1\right)\right) == \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x+x^2}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{1+x}\right) = e^{-1}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right) = \lim_{x\to 0} \log\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^{1/x} = \log(e^{-1}) = -1$$

(b) Se trata de aplicar

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \text{Resto}$$

donde

$$\text{Resto} = \frac{f^{IV}(c)}{4!}x^4$$

siendo $0 < c < 0.05$.

Si calculamos las sucesivas derivadas en 0, tendremos

$$f(x) = 1 - 2x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{-24}{3!}x^3 + \text{Resto}$$

y sustituimos x por 0.05,

$$f(0.05) \approx 1 - 2\cdot 0.05 + 3\cdot 0.05^2 - 4\cdot 0.05^3 \approx 0.907$$

siendo una cota del error la dada por

$$\text{Resto} = \left|\frac{f^{IV}(c)}{4!}0.05^4\right| = \left|\frac{120}{4!(c+1)^6}0.05^4\right| < \left|\frac{120}{4!(0+1)^6}0.05^4\right| \approx 3.125\times 10^{-5}$$

– –

SEGUNDO PARCIAL

6. Sea

$$A = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq y\}$$

y

$$f(x,y) = y - x^2$$

Calcular los extremos globales de f en A.

SOLUCIÓN:

La representación gráfica de la región A viene dada por la región amarilla siguiente

Los puntos críticos se obtienen de resolver

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 = 0$$

por lo que la función f no tiene puntos críticos (en particular no tiene puntos críticos en el interior de A). Así que sus posibles extremos han de estar en puntos de la frontera. Como ésta está formada por dos curvas, resolvemos dos problemas de extremos condicionados:

- En la recta $x = y$: Se trata de calcular los puntos críticos de $f(x,y) = y - x^2$ sujetos a $x = y$, es decir, de $f(x) = x - x^2$, cuyo único punto crítico es $x = \frac{1}{2}$. Por tanto, en la recta $x = y$ el único punto crítico es $P_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que forma parte de la frontera de A.

- En la porción de circunferencia $x^2+y^2 = 4$: Se trata de calcular los puntos críticos de $f(x,y) = y - x^2$ sujetos a $x^2+y^2 = 4$, es decir, de $f(y) = y - (4-y^2)$, que tiene por punto crítico $y = -\frac{1}{2}$. Pero entonces $x = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$, por lo que tenemos los puntos $P_2\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y $P_3\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, pero de éstos dos, solo P_2 está en la parte de la circunferencia que forma la frontera de A.

Calculando el valor de f en los puntos hallados, resulta ser $f(P_1) = 0.25$; $f(P_2) = -4.25$, por lo que el mínimo está en P_2 y el máximo en P_1.

---

7. Calcular las siguientes integrales:

a) $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz$, siendo $A = \left\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$.

b) $\iint_D e^{x+y} dxdy$, donde D es el cuadrado de vértices $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ y $(-1,0)$.

SOLUCIÓN:

(a) Si efectuamos un cambio a coordenadas esféricas (al ser el recinto de integración una esfera), tendremos

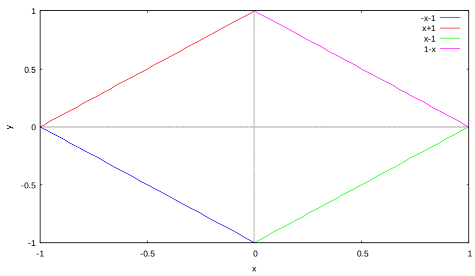
$$x = r\sin\phi\cos\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\phi,\ J = r^2\sin\phi$$

siendo $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. Además sabemos que con este cambio, siempre se tiene que $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Por tanto

$$\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^1 \sqrt{r^2}\, e^{-r^2} r^2 \sin\phi dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi \int_0^1 r^3 e^{-r^2} dr = \ldots = 4\pi\left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right)$$

(b) En este caso el recinto de integración viene dado por el cuadrado



por lo que los límites de integración variarán de la forma siguiente:

Si $-1 \leq x \leq 0$ entonces $-1-x \leq y \leq x+1$; si $0 \leq x \leq 1$ entonces $x-1 \leq y \leq 1-x$

Por tanto

$$\iint_D e^{x+y} dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{x+1} e^{x+y} dy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} e^{x+y} dy = \ldots = \frac{3}{2}e + \frac{1}{2}e^{-3}$$

---

8. Resolver los siguientes apartados:

a) Obtener todas las funciones $f(x)$ para las cuales la ecuación diferencial

$$x^2 + y + f(x)y' = 0$$

tiene el factor integrante $\mu(x) = x$.

b) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - y' + 2y = 2x^2 - 2x$$

SOLUCIÓN:

(a) La edo puede ponerse en la forma

$$x^2 + y + f(x)\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y)dx + f(x)dy = 0$$

Si queremos que esta edo admita a $\mu(x) = x$ como factor integrante, se verificará que la edo

$$x(x^2 + y)dx + xf(x)dy = 0$$

es exacta, lo que quiere decir que

$$\frac{\partial(x(x^2 + y))}{\partial y} = \frac{\partial(xf(x))}{\partial x} \Leftrightarrow x = f(x) + xf'(x)$$

Es decir, que la $f(x)$ buscada es la solución de la edo

$$x = y + xy'$$

Puesto que la misma puede ponerse como

$$y' + \frac{1}{x}y = 1$$

se trata de una edo lineal de 1er orden, cuya solución viene dada por

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right) = e^{-\log x}\left(\int e^{\log x}dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(\int xdx + C\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Por tanto, las funciones $f(x)$ que hace que la edo inicial admita a $\mu(x) = x$ como factor integrante son las funciones de la forma

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

(b) La solución general de la edo homogénea es (las raíces del polinomio característico son $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$)

$$y_{GH} = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_1\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right)$$

y probaremos como solución particular de la no homogénea $y_{PNH} = Ax^2 + Bx + C$. Si sustituimos y_{PNH} en la edo inicial y operamos, llegamos a

$$2A - (2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 2x$$

de donde, igualando coeficientes, resulta ser $A = 1,\ B = 0$ y $C = -1$. De esta forma, la solución general de la edo lineal no homogénea dada será

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH} = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + C_1\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right) + x^2 - 1$$

$--------------------------------$

9. Probar que la ecuación

$$z^2 - 5xyz + x^3 + 5x^2y = 0$$

define una función implícita $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(1,1)$, con $z(1,1) = 2$. Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.

SOLUCIÓN:
Puesto que

$$\varphi(x,y,z) = z^2 - 5xyz + x^3 + 5x^2y$$

verifica que

$$\varphi(1,1,2) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mid_{(1,1,2)} = 2z - 5xy \mid_{(1,1,2)} = -3 \neq 0$$

es cierto que la expresión define una función implícita $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(1,1,2)$**.**

Las derivadas parciales de z las calcularemos a partir de la expresión

$$z^2(x,y) - 5xy \cdot z(x,y) + x^3 + 5x^2y = 0 \qquad (*)$$

por lo que si derivamos respecto de x :

$$2zz_x - (5yz + 5xyz_x) + 3x^2 + 10xy = 0$$

de donde

$$z_x = \frac{5yz - 3x^2 - 10xy}{2z - 5xy} \qquad (**)$$

De igual forma, si derivamos $(*)$ respecto de y :

$$2zz_y - 5xz - 5xyz_y + 5x^2 = 0$$

y particularizando en $(1,1,2)$ se llega a $z_y(1,1) = \frac{-5}{3}$.

Si volvemos a derivar respecto de y la anterior expresión $(**)$

$$z_{xy} = \frac{(5z + 5yz_y - 10x)(2z - 5xy) - (5yz - 3x^2 - 10xy)(2z_y - 5x)}{(2z - 5xy)^2}$$

y ahora solo tenemos que sustituir $(x,y,z) = (1,1,2)$ y $z_y(1,1) = \frac{-5}{3}$, obteniéndose

$$z_{xy}(1,1) =$$

$--------------------------------$

10. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x} + 2e^{x-y} \text{ si } x \neq 0 \\ 2e^{-y} \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

a. Calcular sus derivadas parciales en $(0,0)$.
b. Hallar la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(1,1)$ según la dirección del vector $\vec{v} = (-1,2)$.

SOLUCIÓN:

(a) Se trata de calcular los siguientes límites:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h+0,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cos\frac{\pi}{h}+2e^h-2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cos\frac{\pi}{h}}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{2e^h-2}{h} = \lim_{h\to 0} h\cos\frac{\pi}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{2(e^h-1)}{h} = 0 + \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 0+2 = 2$$

donde hemos utilizado equivalencias para resolver la indeterminación (también podría resolverse por L'Hôpital)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h+0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2e^{-h}-2}{h} = \lim_{h\to 0}(-2e^{-h}) = -2$$

(en este caso hemos resuelto esta indeterminación por L'Hôpital, aunque también podríamos haber aplicado equivalencias).

(b) Se trata de calcular el siguiente límite

$$D_{(-1,2)}f(1,1) = \lim_{t\to 0}\frac{f((1,1)+t(-1,2))-f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(1-t,1+2t)-f(1,1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(1-t)^2\cos\frac{\pi}{1-t}+2e^{(1-t)-(1+2t)}-1}{t} = -4$$

(en este caso hemos resuelto esta indeterminación por L'Hôpital).

– –