MATEMATICAS I **CURSO 15-16**

FINAL SEPTIEMBRE **2 Septiembre 2016**

ENUNCIADO Y RESUELTO

---

1. **[1.75 PUNTOS] Consideremos la aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **que verifica**

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, 2x+3y+z, 3y-9z)$$

   a. **Calcular** (x,y,z) **tal que** $f(x,y,z) = (1,2,0)$.
   b. **Calcular una base y la dimensión de** $\mathrm{Im}(f)$.
   c. **Calcular una base y la dimensión de** $\ker(f)$.
   d. **Discutir para qué valores de** $a \in \mathbb{R}$, $(a,1,1) \in \mathrm{Im}(f)$, **y para qué valores** $(a,1,1) \in \ker(f)$.
   e. **Hallar la matriz asociada a** f **cuando se considera el espacio inicial la base**

$$B = \{(1,1,0),(1,0,1),(-1,-1,1)\}$$

   y la base canónica en el espacio final.

SOLUCIÓN:

(1.a) Sabemos que

$$M_{C,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a f en las bases canónicas. De esta forma, $f(x,y,z) = (1,2,0)$ equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} x+2y-z = 1 \\ 2x+3y+z = 2 \\ 3y-9z = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución $(x,y,z) = (1-5z, 3z, z)$.

(1.b) Sabemos que

$$\mathrm{Im}(f) =< (1,2,0),(2,3,3),(-1,1,-9) >=< (1,2,0),(2,3,3) >$$

puesto que los 3 vectores son linealmente dependientes, y, por ejemplo, los dos primeros son independientes. Así, $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ y una base suya sería la formada por los dos vectores anteriores.

(1.c) $\ker(f)$ se obtiene de resolver el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x+2y-z = 0 \\ 2x+3y+z = 0 \\ 3y-9z = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución $x = -5z$, $y = 3z$. Por tanto $\ker(f) = \{(-5z, 3z, z)\} =< (-5, 3, 1) >$, y por tanto su dimensión es 1.

(1.d) Tendremos que si $(a, 1, 1) \in \mathrm{Im}(f)$ entonces puede ponerse como combinación lineal de los dos vectores de la base de $\mathrm{Im}(f)$, es decir

$$(a, 1, 1) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(2, 3, 3)$$

de donde

$$\left\{ \begin{array}{r} \alpha + 2\beta = a \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \\ 3\beta = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{3},\ a = \frac{2}{3}$$

De igual forma, si $(a, 1, 1) \in \ker(f)$, entonces habrá de ser $(a, 1, 1) = \alpha(-5, 3, 1)$, lo que es imposible.

(1.e) Aplicando el esquema conocido de cambio de base, se tiene que

$$M_{B,C}(f) = M_{C,C}(f) \times M_{B,C} = M_{C,C}(f) \times M_{B,C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -4 \\ 3 & -9 & -12 \end{pmatrix}$$

_ _

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}$$

- **a.** **[0.75 PUNTOS] Estudiar para qué valores de a la matriz A es diagonalizable.**
- **b.** **[0.5 PUNTOS] Para $a = 0$ encontrar, si existen, las matrices P y D que hacen que A sea diagonalizable.**
- **c.** **[0.5 PUNTOS] Para $a = 0$, calcular A^{24}.**

SOLUCIÓN:

(2.a y 2.b) El polinomio característico de A viene dado por

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

cuyas soluciones son $\lambda = \{1, 1, 2\}$. Calcularemos los subespacios propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$ (simple):

- Se tiene que

$$S_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z) \ : \ A(x,y,z)^T = 1(x,y,z)^T\right\}$$

Así, de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

resulta

$$\begin{cases} ax = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

por lo que distinguiremos los casos $a = 0$ y $a \neq 0$: Si $a = 0$, el sistema anterior tiene por solución $x = -y-z$, por lo que el subespacio vectorial correspondiente será

$$S_{\lambda_1} = \{(-y-z,y,z)\} =< (-1,1,0),(-1,0,1) >$$

y la matriz será diagonalizable (posteriormente calcularemos S_{λ_2} para este caso).

Si $a \neq 0$, entonces ha de ser $x = 0$, y la solución del sistema será $x = 0$, $y = -z$, por lo que el subespacio vectorial correspondiente será

$$S_{\lambda_1} = \{(0,-z,z)\} =< (0,-1,1) >$$

y la matriz no será diagonalizable (por tener dimensión 1 el subespacio asociado al valor propio doble $\lambda_1 = 1$).

Ya para el caso $a = 0$, obtendremos S_{λ_2} :

$$S_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z) \ : \ A(x,y,z)^T = 2(x,y,z)^T\right\} =\ldots= \{(0,0,z)\} =< (0,0,1) >$$

Por tanto, existen matrices P y D tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.c) Sabemos que se verifica

$$A^{24} = (PDP^{-1})^{24} = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}) = PD^{24}P^{-1}$$

por lo que

$$A^{24} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{24} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{24}-1 & 2^{24}-1 & 2^{24} \end{pmatrix}$$

– –

3. **[1.5 PUNTOS] Consideremos la función**

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

a. **Calcular el límite**

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-x}{x^2}$$

b. **Calcular una aproximación de** $F\left(\frac{1}{2}\right)$ **utilizando un polinomio de McLaurin de grado 4**.

SOLUCIÓN:

(3.a) Se trata de una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, ya que $F(0) = 0$. Por tanto, podremos utilizar la regla de L'Hôpital para resolver esta indeterminación, teniendo en cuenta que, por el teorema fundamental del Cálculo, se tiene que $F'(x) = e^{-x^2}$. De esta forma,

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x} = 0$$

donde el segundo límite lo hemos resuelto usando equivalencias, puesto que $e^{-x^2}-1$ es equivalente a $-x^2$ cuando $x \to 0$ (Nota: Este último límite también podría resolverse usando nuevamente L'Hôpital).

(3.b) El polinomio de McLaurin de grado 4 viene dado por

$$P(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \frac{F'''(0)}{3!}x^3 + \frac{F^{IV}(0)}{4!}x^4$$

por lo que teniendo en cuenta que

$$F(0) = 0;\ F'(0) = 1;\ F''(0) = 0;\ F'''(0) = -2;\ F^{IV}(0) = -2$$

se tendrá

$$P(x) = 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-2}{3!}x^3 + \frac{-2}{4!}x^4 = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x$$

– –

4. **[1.5 PUNTOS] Calcular los extremos absolutos de la función**

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 3y$$

en el conjunto

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0,\ 4x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

SOLUCIÓN:

El recinto M viene delimitado por el eje X y la semielipse con centro el origen y semiejes $a = 1$ y $b = 2$. Así, calculamos en primer lugar los puntos críticos en el interior de M :

Resolviendo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

y se verifica que $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \in int(M)$.

Obtendremos ahora los puntos críticos en la frontera:

- En el eje X (estudiamos los posibles puntos en el intervalo $[-1,1]$), se tiene (al ser $y = 0$) la función

$$f(x,0) = 4x^2 - 4x$$

que tiene un único punto crítico en $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$. Por tanto, tenemos otro punto candidato $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

- En la semielipse $4x^2 + y^2 = 4$: Usando multiplicadores de Lagrange, consideramos la función

$$F(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 4x - 3y + \lambda(4x^2 + y^2 - 4)$$

y buscamos sus puntos críticos. Para ello resolvemos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 8x - 4 + 8\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 3 + 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Si consideramos $x, y \neq 0$ (los casos $x = 0$ o $y = 0$ no son posibles; basta con sustituir en la 1ª o 2ª ec. para comprobarlo), y despejando λ de las dos primeras ecuaciones e igualando resultados, nos conducen al sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

que tiene por solución los puntos $C\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right)$ y $D\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{-6}{\sqrt{13}}\right)$, aunque D no está en la región considerada.

Solo hemos de analizar el valor de f en todos los puntos obtenidos, y también en los vértices de la figura, que son $E(-1,0)$ y $F(1,0)$. Calculando estos valores, resulta que el mínimo se alcanza en el punto A, siendo $f(A) = -3.25$, mientras que el máximo está en E, con $f(E) = 8$.

— —

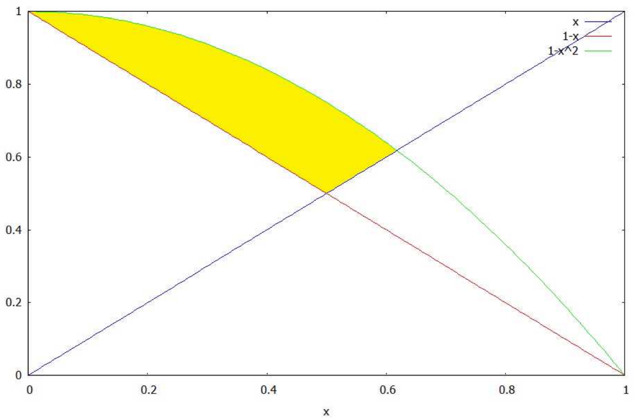
5. [2 PUNTOS] Calcular las siguientes integrales:

a. $\iint_A (x^2+y^2)^{-3/2} dxdy$, **siendo** $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq x,\ x+y \geq 1\right\}$.

b. $\iiint_B \frac{\exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz$, **donde** B **es el recinto limitado inferiormente por el paraboloide** $z = x^2+y^2$ **y superiormente por el plano** $z = 4$.

SOLUCIÓN:

(5.a) La región de integración A viene dada por la parte amarilla de la figura



por lo que si hacemos un cambio a polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; $J = r$), tendremos que, en la región considerada, se verifica que $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, mientras que r varía entre la recta $x+y = 1$ y el radio de la circunferencia, es decir

$$\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \leq r \leq 1$$

De esta forma

$$\iint_A (x^2+y^2)^{-3/2} dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} (r^2)^{-3/2} r dr = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} \frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \left[-\frac{1}{r}\right]_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos\theta + \sin\theta - 1) d\theta = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(5.b) En este caso vamos a realizar un cambio a coordenadas cilíndricas ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$; $J = r$), teniendo en cuenta que (x,y) varían en la proyección de la figura en el plano XY (y que es el círculo $x^2+y^2 \leq 4$), mientras que z varía entre el paraboloide $z = x^2+y^2$ y el plano $z = 4$, es decir

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 2,\ r^2 \leq z \leq 4$$

Por tanto

$$\iiint_B \frac{\exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 \frac{e^r}{r} r dz = \ldots = 4(e^2-1)\pi$$

---

6. [**1.5 PUNTOS**]

a. Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

b. Determinar el valor de k **para que la ecuación**

$$(2xy^2 + ye^x)dx + (2x^2y + ke^x - 1)dy = 0$$

sea exacta. Resolver la ecuación para dicho valor.

SOLUCIÓN:

(6.a) La ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$ tiene por soluciones $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$. Por tanto, la solución general de la edo lineal homogénea asociada viene dada por

$$y_{GH}(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

Para hallar la solución particular de la edo no homogénea, y utilizando el método de variación de constantes, probaremos con una solución de la forma

$$y_{PNH} = Axe^{2x}$$

ya que hay repetición entre la parte no homogénea de la edo inicial, e^{2x}, y una parte de y_{GH}, (que es c_1e^{2x}). Sustituyendo esta expresión en la edo inicial, resulta

$$(4A + 4Ax)e^{2x} - (A + 2Ax)e^{2x} - 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

de donde, operando, resulta ser $A = \frac{1}{3}$.

Por tanto, la solución general de la edo no homogénea viene dada por

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH} = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

Para hallar las constantes de integración, usaremos las condiciones iniciales dadas:

$$\text{De} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{-1}{9} \\ c_2 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

de manera que la solución del PVI es

$$y_{GNH} = \frac{-1}{9}e^{2x} + \frac{1}{9}e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

(9.b) Observamos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy + e^x; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy + ke^x$$

por lo que ha de ser $k = 1$.

Así, la solución general de esta edo exacta viene dada por $f(x,y) = cte$, siendo $f(x,y)$ una función que verifica $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Usando la primera de las condiciones,

$$f(x,y) = \int Mdx = \int (2xy^2 + ye^x)dx = x^2y^2 + ye^x + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usaremos la condición $\frac{\partial f}{\partial y} = N$, es decir

$$2x^2y + e^x + g'(y) = 2x^2y + e^x - 1 \Rightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y + cte$$

Por tanto, la solución general de la edo es

$$x^2y^2 + ye^x - y = cte$$

_ _