MATEMATICAS I **CURSO 15-16**

FINAL JUNIO **1 Julio 2016**

ENUNCIADO Y RESUELTO

Los alumnos con un solo parcial suspenso, deberán realizar las preguntas del parcial correspondiente. Los alumnos que tengan pendiente toda la asignatura, deberán realizar las tres primeras preguntas de cada uno de los parciales.

PRIMER PARCIAL

1. **[1.75 PUNTOS] Consideremos la aplicación lineal** $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **que verifica** $g(1,-1) = (2,1,2)$ **y** $g(0,2) = (-2,2,2)$. **Sea** f **una aplicación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a. **Calcular la matriz asociada a** g **en bases canónicas.**
   b. **Calcular una base y la dimensión del conjunto** $\ker(f)$.
   c. **Encontrar los valores de** a **para los cuales** $(1,1,a) \in \mathrm{Im}(f)$.
   d. **Calcular** $(f \circ g)(2,1)$ **y la dimensión del conjunto** $\mathrm{Im}(f \circ g)$.
   e. **Hallar la matriz asociada a** f **cuando se considera en ambos espacios la base**

$$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

SOLUCIÓN:
(1.a) Sea

$$M(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a g en las bases canónicas. De esta forma, las expresiones $g(1,-1) = (2,1,2)$ y $g(0,2) = (-2,2,2)$ se traducen en

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lo que da lugar a unos sistemas de ecuaciones, que tienen por solución

$$M(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.b) Sabemos que ker(f) se obtiene de resolver el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución $x = z,\ y = -2z$. Por tanto $\ker(f) = \{(z, -2z, z)\} = <(1, -2, 1)>$, y por tanto su dimensión es 1.

(1.c) Sabemos que $\mathrm{Im}(f) = <(1, -1, 1), (2, 0, 1), (3, 1, 1)> = <(1, -1, 1), (2, 0, 1)>$, puesto que los 3 vectores son linealmente dependientes, y los dos primeros son independientes. Así,

$$(1, 1, a) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow (1, 1, a) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(2, 0, 1)$$

de donde

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -\alpha = 1 \\ \alpha + \beta = a \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1,\ \beta = 1,\ a = 2$$

Por tanto, si $a = 2$ se verifica que $(1, 1, a) \in \mathrm{Im}(f)$.

(1.d) Se verifica $(f \circ g)(2, 1) = f(g(2, 1))$, y puesto que

$$g(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

tendremos que

$$(f \circ g)(2, 1) = f(g(2, 1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Nota: Podemos calcular en general la matriz asociada a $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ya que se verifica

$$M(f \circ g) = M(f) \times M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$(f \circ g)(2, 1) = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la dimensión de $\mathrm{Im}(f\circ g)$ será 2, ya que está generado por las dos columnas de la matriz $M(f\circ g)$ (y ambas son linealmente independientes).

(1.e) Aplicando el esquema conocido de cambio de base, se tiene que

$$M_{B,B}(f) = M_{C,B}\times M_{C,C}(f)\times M_{B,C} = M_{B,C}^{-1}\times M_{C,C}(f)\times M_{B,C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =\ldots= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

– –

2. [0.75+0.5+0.5 PUNTOS] Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}$$

a. **Estudiar para qué valores de a la matriz A es diagonalizable. Para** $a = 3$ **encontrar, si existen, las matrices P y D tal que** $P^{-1}AP = D$.
b. **Calcular los valores de a para los cuales** $(1,5,-1)$ **es un vector propio de valor propio** 4.
c. **Encontrar los valores de a para los cuales** -2 **es un valor propio de A y hallar su subespacio propio asociado**.

SOLUCIÓN:
(2.a) El polinomio característico de A viene dado por

$$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & a \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3+12\lambda+16 = 0$$

cuyas soluciones son $\lambda = \{-2,-2,4\}$. Por tanto la matriz será o no diagonalizable independientemente del valor que tome a.

Vamos a realizar los cálculos para el caso $a = 3$. Para ello obtenemos los subespacios propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = -2$ (doble) y $\lambda_2 = 4$ (simple):

$$S_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z)\ :\ A(x,y,z)^T = -2(x,y,z)^T\right\}$$

Así, resolviendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

resulta ser

$$x+z = 0$$

por lo que

$$S_{\lambda_1} = \{(-z,y,z)\} =< (-1,0,1),(0,1,0) >$$

Análogamente

$$S_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z) \,:\, A(x,y,z)^T = 4(x,y,z)^T\right\} =\ldots= \{(z,z,z)\} =< (1,1,1) >$$

Por tanto, existen matrices P y D tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2.b) Para que $(1,5,-1)$ sea un vector propio de valor propio 4 ha de verificarse que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lo cual es imposible (basta con que multipliquemos e igualemos).

Nota: También podría probarse que es imposible ya que el subespacio asociado a $\lambda_2 = 4$ es $< (1,1,1) >$, por lo que cualquier vector suyo ha de tener las 3 componentes iguales.

(2.c) Ya hemos probado que -2 es valor propio (y doble) de A, independientemente de los valores de a. Podemos calcular su subespacio propio asociado en función de los valores de a (en (2.a) solo lo hemos obtenido para el valor $a = 3$):

Hemos de resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+z = 0 \\ 3x + az = 0 \\ x+z = 0 \end{array} \right.$$

y para que la solución de este sistema sea una única ecuación (ya que así el subespacio vectorial tendrá dimensión 2), ha de ser $a = 3$, es decir, el caso que hemos resuelto en (2.a). Por tanto

$$S_{\lambda_1} = \{(-z,y,z)\} =< (-1,0,1),(0,1,0) >$$

_ _

3. **[1.5 PUNTOS] Resolver los siguientes apartados**
   a. **Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$ aquella que forma con las partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima.**
   b. **Demostrar la desigualdad**

$$\frac{x}{x+1} \leq \log(1+x),\ \forall x \geq 0$$

SOLUCIÓN:

(3.a) La ecuación de una recta viene dada por $y = ax + b$, y si ésta ha de pasar por $(1,2)$, ha de ser $2 = a \cdot 1 + b$, de donde $b = 2 - a$. Así, cualquier recta que pasa por $(1,2)$ es de la forma $y = ax + 2 - a$. Esta recta corta al eje X en el punto de abcisa $x = \frac{a-2}{a}$ (éste será la base del triángulo), y corta al eje Y en el punto de ordenada $y = 2 - a$ (esta será la altura de nuestro triángulo). Por tanto, el triángulo tendrá por área

$$A = \frac{\frac{a-2}{a}(2-a)}{2} = \frac{4a - a^2 - 4}{2a}$$

Si derivamos y hallamos los puntos críticos

$$A' = 0 \Leftrightarrow \frac{(4-2a)2a - (4a - a^2 - 4)2}{4a^2} = 0 \Rightarrow 8 - 2a^2 = 0$$

y como a ha de ser negativa (las rectas que cortan a ambos ejes de coordenadas pasando por $(1,2)$, forzosamente tienen la pendiente negativa), resulta que $a = -2$, es decir, se trata de la recta $y = -2x + 4$ (que forma un triángulo rectángulo isósceles -igual altura que base- con los ejes de coordenadas). No es preciso probar que en este punto se alcanza el mínimo de área.

(3.b) Una forma de probar esta desigualdad es considerar la función $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{x+1}$, y probar que es creciente si $x \geq 0$ (si probamos ésto, se tendrá que $f(x) \geq f(0) = 0$, con lo que tendremos probada la desigualdad). Ésto es inmediato, ya que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

que trivialmente es positiva siempre que $x \geq 0$.

– –

4. **[1.5 PUNTOS] Se consideran los siguientes subespacios de** $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(x,y,z);\ x - z = 0,\ y + z - x = 0\}$$

$$B = \{(\alpha - 2\beta, \alpha - \beta, \beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

   a. **Calcular una base ortonormal de** A **y otra de** $A^{\perp}$.
   b. **Dado el vector** $(1,2,-1)$, **calcular su proyección ortogonal sobre** B.

SOLUCIÓN:

(4.a) Una base de A viene dada por

$$A = \{(z,0,z)\} =< (1,0,1) >$$

mientras que una base de $A^{\perp}$ se obtiene sin más que tener en cuenta que

$$A^{\perp} = \{(x,y,z);\ (x,y,z) \cdot (1,0,1) = 0\} = \{(x,y,z);\ x + z = 0\} =$$
$$= \{(-z,y,z)\} =< (-1,0,1),(0,1,0) >$$

De esta forma, una base ortonormal de A es la misma que hemos obtenido aunque dividiendo por su módulo (ya que está formada por un único vector), mientras que para obtener una base ortonormal de $A^{\perp}$ no es preciso usar las ecuaciones del método de G-S, habida cuenta que se observa que los dos vectores obtenidos son ortogonales, por lo que también la base será ortonormal sin más que dividir por sus módulos respectivos. Así, resultarán las bases ortonormales

$$A =< \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \text{ y } A^{\perp} =< \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0) >$$

(4.b) Se tiene que

$$B = \{(\alpha - 2\beta, \alpha - \beta, \beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =< (1,1,0), (-2,-1,1) >$$

mientras que

$$B^{\perp} = \{(x,y,z);\ (x,\ y,z) \cdot (1,1,0) = 0,\ (x,\ y,z) \cdot (-2,-1,1) = 0\} =$$
$$= \{(x,y,z);\ x+y = 0,\ -2x - y + z = 0\} = \{(-y,y,-y)\} =< (-1,1,-1) >$$

Así, hemos de poner $(1,2,-1) = \alpha(1,1,0) + \beta(-2,-1,1) + \gamma(-1,1,-1)$, y lo que se trata es de hallar α y β. Para ello, multiplicaremos escalarmente esta igualdad por los vectores de B :

$$(1,2,-1) \cdot (1,1,0) = \alpha(1,1,0) \cdot (1,1,0) + \beta(-2,-1,1) \cdot (1,1,0) + \gamma(-1,1,-1) \cdot (1,1,0)$$
$$(1,2,-1) \cdot (-2,-1,1) = \alpha(1,1,0) \cdot (-2,-1,1) + \beta(-2,-1,1) \cdot (-2,-1,1) + \gamma(-1,1,-1) \cdot (-2,-1,1)$$

de donde

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha - 3\beta \\ -5 = -3\alpha - 6\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{11}{7}, \beta = \frac{1}{21}$$

y la proyección ortogonal sobre B pedida es

$$\frac{11}{7}(1,1,0) + \frac{1}{21}(-2,-1,1) = \left(\tfrac{31}{21},\ \tfrac{32}{21},\ \tfrac{1}{21} \right)$$

– –

5. [2 PUNTOS] Consideremos la función

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt,\ x > 0$$

a. **Hallar los polinomios de Taylor de grados** 2 **y** 3 **de** $f(x)$ **alrededor del punto** $a = 1$.
b. **Aproximar el valor de** $f(1.1)$ **usando el polinomio de Taylor anterior de grado** 2 **y estimar el error cometido**.

SOLUCIÓN:

(5.a) Por el teorema fundamental del Cálculo sabemos que

$$f'(x) = \frac{e^x}{x}$$

de donde

$$f'(1) = e;\ f''(1) = 0;\ f'''(1) = e;\ \text{además}\ f(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t} dt = 0$$

por lo que aplicando la fórmula de Taylor en $a = 1$:

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 = e(x-1) + \frac{e}{3!}(x-1)^3$$

mientras que

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = e(x-1)$$

(5.b) Se tendrá entonces que

$$f(1.1) = e(1.1-1) + \frac{f'''(c)}{3!}(1.1-1)^3$$

de forma que

$$f(1.1) \approx e(1.1-1)$$

con error dado por

$$Error = \left| \frac{f'''(c)}{3!}(1.1-1)^3 \right| = \left| \frac{1}{3!} \frac{e^c(c^2-2c+2)}{c^3}(1.1-1)^3 \right|$$

siendo $1 < c < 1.1$. Este error se acota sin más que hacer

$$Error < \left| \frac{1}{3!} \frac{e^{1.1}(1.1^2 - 2 \cdot 1 + 2)}{1^3}(1.1-1)^3 \right| < \left| \frac{1}{3!} \frac{3(1.1^2 - 2 \cdot 1 + 2)}{1^3}(1.1-1)^3 \right| = 6.05 \times 10^{-4}$$

(notemos que c cuando está sumando o multiplicando la acotamos por 1.1, mientras que si está restando o dividiendo la acotamos por 1).

— —

6. **[1.5 PUNTOS] Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones**:
   a. **Si W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por el siguiente conjunto de vectores**
   $$\{(1,2,1),(0,1,0),(1,0,-1),(1,1,-1)\},$$
   entonces $W = \mathbb{R}^3$.
   b. **Si A una matriz cuadrada de orden 3, diagonalizable, tal que los valores propios de la matriz $3A$ son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 9$, entonces $|A| = 3$.**
   c. **Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal y sea A su matriz asociada respecto a las bases canónicas. Supongamos que $|A| \neq 0$. Entonces el núcleo de esta aplicación lineal es el subespacio vectorial formado únicamente por el vector nulo.**

SOLUCIÓN:

(6.a) La afirmación será cierta si tres de estos cuatro vectores son linealmente independientes. Como ésto lo verifican los 3 primeros, es cierto que $W = \mathbb{R}^3$.

(6.b) Si la matriz A es diagonalizable, sabemos que existen P y D tal que $P^{-1}AP = D$. Pero entonces la matriz $3A$ también es diagonalizable, ya que verifica $P^{-1}(3A)P = 3D$, siendo esta última matriz $3D$ la matriz diagonal cuyos elementos son $3,3$ y 9; es decir que $D = diag(1,1,3)$. Entonces, como $|P^{-1}AP| = |D| = 3$, resultará que $|P^{-1}||A||P| = 3$, y como $|P^{-1}||P| = 1$, entonces ha de ser $|A| = 3$.

(6.c) Si $|A| \neq 0$ quiere decir que el sistema de ecuaciones que hemos de resolver para calcular el núcleo es compatible determinado, por lo que tiene solución única, y como este sistema es homogéneo, la única solución será la trivial. Por tanto la afirmación es cierta.

— —

SEGUNDO PARCIAL

7. **[1.5 PUNTOS] Consideramos una placa circular de radio $2\sqrt{2}$ y centro el origen. La temperatura en cada punto $P(x,y)$ de la placa viene dada por**
$$T(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

Localizar el punto más caliente y el punto más frío de la placa.

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular los puntos críticos de la función T tanto en el interior $(x^2+y^2<8)$ como en la frontera de la placa $(x^2+y^2=8)$:

- Puntos críticos en interior: De

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 3x^2+3y=0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 3y^2+3x=0 \end{cases} \Rightarrow x^4+x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (entonces } y=0) \\ x=-1 \text{ (con } y=-1) \end{cases}$$

por lo que se obtienen los puntos $A(0,0)$ y $B(-1,-1)$, ambos en el interior de la placa.

- Puntos críticos en la frontera: Usando multiplicadores de Lagrange, analizamos los puntos críticos de

$$F(x,y,\lambda) = x^3+y^3+3xy+\lambda(x^2+y^2-8)$$

para lo que resolvemos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2+3y+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2+3x+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$$

Despejando λ de la 1ª y 2ª ecuación, e igualando resultados, se obtiene, siempre que $x,y\neq 0$ (si $x=0$ el sistema anterior no tiene solución, ya que $y=0$, por la 1ª ecuación, y entonces no se verifica la 3ª ecuación; análogamente si $y=0$) la expresión

$$x^2y-xy^2=x^2-y^2$$

que junto con la 3ª ec. anterior, nos da un sistema de 2 ec. con 2 incóg.

Este sistema se puede resolver fácilmente si observamos que la expresión anterior puede ponerse como

$$xy(x-y)=(x-y)(x+y)$$

es decir

$$(x-y)(xy-(x+y))=0$$

por lo que

$$x=y \text{ ó } xy=x+y$$

Analizamos ambos casos por separado:

- Si $x=y$, sustituyendo en $x^2+y^2=8$, y simplificando, se llega a $x^2=4$, de donde $x=\pm 2$. Así hemos obtenido los puntos $C(2,2)$ y $D(-2,-2)$.

- Si $xy=x+y$, despejando y y sustituyendo en $x^2+y^2=8$, se llega a

$$x^4-2x^3-6x^2+16x-8=0$$

que tiene por soluciones $x=\{2,-1\pm\sqrt{3}\}$. Por tanto se obtienen los puntos $(2,2)$, ya obtenido anteriormente, y $E\left(-1+\sqrt{3}, \frac{-1+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}\right)$ y $F\left(-1-\sqrt{3}, \frac{-1-\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}}\right)$.

Solamente hemos de evaluar $T(x,y)$ en los 6 puntos obtenidos, resultando que el punto más caliente es C (su temperatura es de 28) y el más frio está en E y F (la temperatura sería en ellos -26).

– –

8. [**2 PUNTOS**] **Calcular**

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dxdydz$$

siendo S **el primer octante de la esfera de centro el origen y radio** $a > 0$:

a. **Usando coordenadas cilíndricas**.
b. **Usando coordenadas esféricas**.

SOLUCIÓN:

(8.a) Mediante coordenadas cilíndricas ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,\ z = z;\ J = r$) se verifica que

$$0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-r^2}$$

por lo que

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^{\pi/2} r^2 d\theta \int_0^a dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}\,dr =$$
$$= \frac{\pi}{2}\frac{2a^5}{15} = \frac{\pi a^5}{15}$$

Nota: Esta última integral se hace mediante el cambio $t^2 = a^2 - r^2$, resultando una integral inmediata; también puede hacerse mediante un cambio a trigonométricas ($r = a\sin t$), aunque es un poco más complicada.

(8.b) Mediante coordenadas esféricas

$$x = r\sin\phi\cos\theta,\ y = r\sin\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = r\cos\phi;\ J = r^2\sin\phi$$

se verifica que

$$0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

por lo que

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a dr \int_0^{\pi/2} \left((r\sin\phi\cos\theta)^2 + (r\sin\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\right) r^2\sin\phi d\phi =$$
$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin^3\phi d\phi = \frac{\pi}{2}\frac{a^5}{5}\frac{2}{3} = \frac{\pi a^5}{15}$$

– –

9. [**1.5 PUNTOS**]

a. **Resuelve el problema de valor inicial**

$$\begin{cases} y''' + 12y'' + 36y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -7 \end{cases}$$

b. Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$$

SOLUCIÓN:

(9.a) La ecuación característica $r^3 + 12r^2 + 36r = 0$ tiene por soluciones $r_1 = 0$ y $r_2 = -6$ (doble). Por tanto, la solución general de esta edo lineal homogénea viene dada por

$$y(x) = c_1 e^{0x} + (c_2 x + c_3)e^{-6x} = c_1 + (c_2 x + c_3)e^{-6x}$$

Para hallar las constantes de integración, usaremos las condiciones iniciales dadas:

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -7 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 - 6c_3 = 1 \\ -12c_2 + 36c_3 = -7 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = \frac{5}{36} \\ c_2 = \frac{1}{6} \\ c_3 = -\frac{5}{36} \end{array}\right.$$

de manera que la solución del PVI es

$$y(x) = \frac{5}{36} + \left(\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}\right)e^{-6x}$$

(9.b) Si la edo la escribimos en la forma

$$(3x + y - 2)dx + (x-1)dy = 0$$

observamos que $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$, por lo que se trata de una edo exacta.

Así, su solución general viene dada por $f(x,y) = cte$, siendo $f(x,y)$ una función que verifica $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. Usando la primera de las condiciones,

$$f(x,y) = \int M dx = \int (3x + y - 2)dx = \frac{3x^2}{2} + yx - 2x + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usaremos la condición $\frac{\partial f}{\partial y} = N$, es decir

$$x + g'(y) = x - 1 \Rightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y + cte$$

Por tanto, la solución general de la edo es

$$\frac{3x^2}{2} + yx - 2x - y = cte$$

– –

10. [1.5 PUNTOS] Determinar los extremos relativos de la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0;\ z \geq 0$$

SOLUCIÓN:

Derivando implícitamente esta ecuación respecto de x y respecto de y (donde se supone que $z = z(x,y)$), tendremos

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 - 3 + 2zz_x + z_x = 0 \\ -2y + 4 + 2zz_y + z_y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_x = \frac{3-3x^2}{2z+1} \\ z_y = \frac{2y-4}{2z+1} \end{array}\right.$$

por lo que si igualamos a 0 ambas expresiones, tendremos como puntos críticos $(1,2)$ y $(-1,2)$.

Para saber qué tipo de extremos son, habremos de calcular el hessiano en ellos:

$$Hz(x,y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-6x(2z+1)-\left(3-3x^2\right)2z_x}{(2z+1)^2} & -\frac{\left(3-3x^2\right)2z_y}{(2z+1)^2} \\ -\frac{\left(3-3x^2\right)2z_y}{(2z+1)^2} & \frac{2(2z+1)-(2y-4)2z_y}{(2z+1)^2} \end{vmatrix}$$

por lo que en $(1,2)$ habrá un punto de silla, ya que

$$Hz(1,2) = \begin{vmatrix} \frac{-6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} < 0$$

(donde sabemos que $z_x(1,2) = z_y(1,2) = 0;$ siendo $z(1,2) = 2$), mientras que en $(-1,2)$ habrá un mínimo, al ser

$$Hz(-1,2) = \begin{vmatrix} \frac{-6x(2z+1)-\left(3-3x^2\right)2z_x}{(2z+1)^2} & -\frac{\left(3-3x^2\right)2z_y}{(2z+1)^2} \\ -\frac{\left(3-3x^2\right)2z_y}{(2z+1)^2} & \frac{2(2z+1)-(2y-4)2z_y}{(2z+1)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} > 0$$

(donde sabemos que $z_x(-1,2) = z_y(-1,2) = 0;$ siendo $z(-1,2) = 1$)

– –

11. [**1.5 PUNTOS**] **Dadas las funciones** f **y** g **definidas por**

$$f(x,y) = (e^{xy}, xy + \log(x^2+y^2), \cos(xy^2))$$

$$g(x,y,z) = 7 + xy + 3z$$

calcular la matriz jacobiana de $g \circ f$ **en el punto** $(0,1)$.

SOLUCIÓN:

Si lo hacemos directamente,

$$(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = g(e^{xy}, xy + \log(x^2+y^2), \cos(xy^2)) =$$
$$= 7 + e^{xy}(xy + \log(x^2+y^2)) + 3\cos(xy^2)$$

y ahora podemos derivar y particularizar en el punto $(0,1)$:

$$M(g \circ f)(x,y) = \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}, \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(ye^{xy}(xy + \log(x^2+y^2)) + e^{xy}\left(y + \frac{2x}{x^2+y^2} \right) - y^2\sin(xy^2), \right.$$

$$\left. , xe^{xy}(xy + \log(x^2+y^2)) + e^{xy}\left(x + \frac{2y}{x^2+y^2} \right) - 2xy\sin(xy^2) \right)$$

siendo entonces

$$M(g \circ f)(0,1) = (1,2)$$

Otra forma: Si usamos la regla de la cadena, tendremos que al ser $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, la matriz jacobiana de $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tendrá dimensiones 1×2, y se puede calcular a partir de

$$M(g \circ f)(0,1) = Mg(f(0,1)) \times Mf(0,1)$$

Puesto que

$$Mf(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ y + \frac{2x}{x^2+y^2} & x + \frac{2y}{x^2+y^2} \\ -y^2\sin(xy^2) & -2xy\sin(xy^2) \end{pmatrix} \Rightarrow Mf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$Mg(x,y,z) = (y,x,3) \Rightarrow Mg(f(0,1)) = Mg(1,0,1) = (0,1,3)$$

entonces

$$M(g\circ f)(0,1) = Mg(f(0,1)) \times Mf(0,1) = (0,1,3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,2)$$

– –

12. [2 PUNTOS]

a. **Hallar el polinomio de McLaurin de orden 2 de la función**

$$f(x,y) = 4x^3y^2 - 3y\log(x+1)$$

b. **Calcular la siguiente integral**

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$$

SOLUCIÓN:

(12.a) Hemos de aplicar

$$P(x,y) = f(0,0) + [f_x(0,0)x + f_y(0,0)y] + \frac{1}{2!}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2]$$

y como se tiene que

$$f_x = 12x^2y^2 - \frac{3y}{x+1};\ f_y = 8x^3y - 3\log(x+1);$$

$$f_{xx} = 24xy^2 + \frac{3y}{(x+1)^2};\ f_{xy} = 24x^2y - \frac{3}{x+1};\ f_{yy} = 8x^3$$

entonces

$$P(x,y) = 0 + [0x + 0y] + \frac{1}{2!}[0x^2 + 2(-3)xy + 0y^2] = -3xy$$

(12.b) La integral podremos resolverla si se realiza el cambio de variable

$$\frac{x}{x+1} = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2}{1-t^2};\ dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$$

ya que entonces

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx = \int \sqrt{t^2}\, \frac{2t}{(1-t^2)^2}dt = \int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

Esta nueva integral hemos de resolverla descomponiendo en fracciones simples:
Poniéndola en la forma

$$\frac{2t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{2t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}$$

y operando, se llega a

$$\frac{2t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-t)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{(1+t)^2}$$

por lo que

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx = \int \frac{2t^2}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \log|1-t| + \frac{\frac{1}{2}}{1-t} - \frac{1}{2} \log|1+t| - \frac{\frac{1}{2}}{1+t} + cte$$

y solo tenemos que deshacer el cambio de variable.