UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Asignatura: MATEMÁTICAS I

SEGUNDO PARCIAL

GRUPO A

CURSO 14-15

28 mayo 2015

ENUNCIADO Y RESUELTO

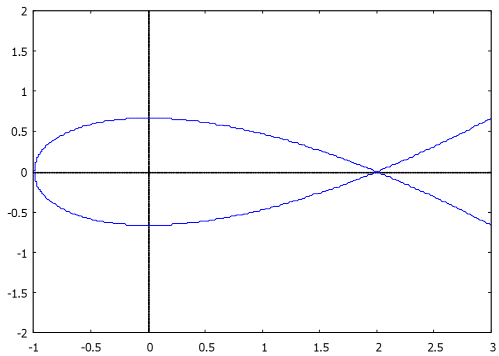
---

1. [1.5 PUNTOS] **Calcular la longitud del bucle de la curva dada por**

$$9y^2 = (x-2)^2(1+x)$$

SOLUCION:

Se trata de calcular la longitud de la parte de la curva cerrada que vemos en el gráfico siguiente



lo que haremos aplicando la fórmula

$$L = 2\int_{-1}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Si operamos, resulta

$$y = \frac{1}{3}(x-2)\sqrt{1+x} \Rightarrow \ldots \Rightarrow y' = \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{(x+2)^2}{4(1+x)}} = \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}}$$

de donde

$$L = 2\int_{-1}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{x+2}{\sqrt{1+x}}dx$$

y esta última integral la calcularemos a través del cambio $1+x = t^2$:

$$L = \int_{-1}^{2} \frac{x+2}{\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{t^2-1+2}{\sqrt{t^2}}2tdt = \int_{0}^{\sqrt{3}} (t^2+1)dt = \ldots = 4\sqrt{3}$$

– –

2. [1.5 PUNTOS] **De una función** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **sabemos que**

$$f(0,0,0) = 2; \qquad \nabla f(0,0,0) = (1,2,-1); \qquad Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

a. **A partir de estos datos, obtener una expresión aproximada para** $f(x,y,z)$ **en un entorno del punto** $(0,0,0)$.
b. **Como aplicación de lo anterior, hallar una aproximación para** $f(0'1,0'1,0'1)$.

SOLUCIÓN:

(2.a) Se trata de aproximar la función $f(x,y,z)$ por su polinomio de McLaurin. Por los datos que nos dan (gradiente=valor derivadas primeras; Hessiana=valor derivadas segundas), podremos hacerlo hasta grado 2, aplicando

$$\begin{aligned} f(x,y,z) \simeq{} & f(0,0,0) + [f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z] + \\ & + \frac{1}{2!}[f_{xx}(0,0,0)x^2 + f_{yy}(0,0,0)y^2 + f_{zz}(0,0,0)z^2 + \\ & +2f_{xy}(0,0,0)xy + 2f_{xz}(0,0,0)xz + 2f_{yz}(0,0,0)yz] \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &\simeq 2 + [1x + 2y + (-1)z] + \\ & \quad + \frac{1}{2!}[3x^2 + (-1)y^2 + (-2)z^2 + 2 \cdot 1xy + 2 \cdot 2xz + 2 \cdot 4yz] \\ &= 2 + x + 2y - z + \frac{1}{2!}[3x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4xz + 8yz] \end{aligned}$$

(2.b) De forma inmediata

$$\begin{aligned} f(0'1,0'1,0'1) \simeq{} & 2 + 0'1 + 2 \cdot 0'1 - 0'1 + \frac{1}{2!}[3 \cdot 0'1^2 - 0'1^2 - 2 \cdot 0'1^2 + \\ & +2 \cdot 0'1 \cdot 0'1 + 4 \cdot 0'1 \cdot 0'1 + 8 \cdot 0'1 \cdot 0'1] \end{aligned}$$

de donde

$$f(0'1,0'1,0'1) \simeq 2'27$$

— —

3. [1.5 PUNTOS] **Una placa tiene forma de la región** $x^2 + y^2 \leq 1$. **La placa se calienta de manera que en cada punto** (x,y) **la temperatura viene dada por**

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$$

Obtener los puntos de la placa donde se alcanza la mayor y menor temperatura, así como calcular dicha temperatura.

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular los valores absolutos que alcanza la función $T(x,y)$ en el conjunto compacto $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Por ello:

- Puntos críticos en el interior de K :

De

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 = 0; \ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y = 0$$

resulta que el único punto crítico es $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, que está en el interior de K.

- Puntos críticos de T en la frontera de K :

Se trata de resolver el problema de extremos condicionados dado por

$$F(x,y) = x^2 + 2y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Sus puntos críticos se obtienen de resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

De la 2ª ec. se obtiene $y = 0$ o $\lambda = -2$: Si $y = 0$, resulta, por la 3ª ecuación, que $x = \pm 1$ (y por la 1ª ec. hallaríamos el valor de λ, aunque no lo necesitamos para nada), por lo que tendríamos los puntos $B(1,0)$ y $C(-1,0)$. Si $\lambda = -2$, sustituyendo en la 1ª ec, $x = -\frac{1}{2}$, de donde, por la 3ª ec., $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Así se obtienen los puntos $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- Evaluando T en todos los puntos obtenidos, al ser

$$T(A) = -\frac{1}{4}; \ T(B) = 0; \ T(C) = 1; \ T(D) = \frac{9}{4}; \ T(E) = \frac{9}{4}$$

el valor mínimo se alcanza en A (y es de $-1/4$), mientras que el máximo se alcanza en D y E (que es de 9/4).

---

4. [1.5 PUNTOS] **Probar que la expresión**

$$xy - x + 2z + e^{2z} = 2$$

define $z = z(x,y)$ **en un entorno de** $P(1,2,0)$. **Calcular, en dicho punto,** $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ **y** $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

SOLUCIÓN:

Si denotamos por $\Phi(x,y,z)$ a la ecuación dada,

$$\Phi(x,y,z) = xy - x + 2z + e^{2z} - 2 = 0$$

puesto que se verifica que

$$\Phi(1,2,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(1,2,0) = 2 + 2e^{2z} \ |_{(1,2,0)} = 4 \neq 0$$

es cierto que la expresión dada define $z = z(x,y)$ en un entorno de $P(1,2,0)$.

Para obtener las derivadas parciales pedidas, solo tenemos que derivar implícitamente en la expresión

$$xy - x + 2z(x,y) + e^{2z(x,y)} = 2$$

- Si derivamos respecto x :

$$y - 1 + 2z_x + 2z_x e^{2z} = 0 \Rightarrow z_x = \frac{1-y}{2+2e^{2z}} \Rightarrow z_x(1,2) = \frac{1-2}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

- Si derivamos respecto y :

$$x + 2z_y + 2z_y e^{2z} = 0 \Rightarrow z_x = \frac{-x}{2+2e^{2z}} \Rightarrow z_x(1,2) = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

- Si derivamos z_x respecto x :

$$z_{xx} = -\frac{(1-y)4z_x e^{2z}}{(2+2e^{2z})^2} \Rightarrow z_{xx}(1,2) = -\frac{(1-2)4(-1/4)}{(2+2)^2} = -\frac{1}{16}$$

- Si derivamos z_x respecto y :

$$z_{xy} = \frac{-(2+2e^{2z}) - (1-y)4z_y e^{2z}}{(2+2e^{2z})^2} \Rightarrow z_{xy}(1,2) = \frac{-4-(1-2)4(-1/4)}{(2+2)^2} = -\frac{5}{16}$$

- Si derivamos z_y respecto y :

$$z_{yy} = -\frac{-x4z_y e^{2z}}{(2+2e^{2z})^2} \Rightarrow z_{xx}(1,2) = -\frac{-4(-1/4)}{(2+2)^2} = -\frac{1}{16}$$

– –

5. [2 PUNTOS] **Calcular**

$$\iint_D xe^{y-x}dxdy$$

siendo D **el conjunto de puntos comprendido entre la parábola** $y = x - x^2$ **y sus tangentes en los puntos** $(0,0)$ **y** $(2,-2)$.

SOLUCIÓN:

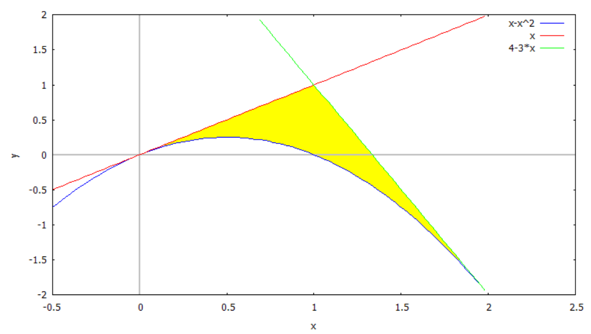
La ecuación de la tangente a $y = x - x^2$ en $(0,0)$ viene dada por

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1x = x$$

mientras que la tangente en $(2,-2)$ es

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) = -2 - 3(x-2) = 4 - 3x$$

Por tanto, el recinto de integración nos viene dado por la región coloreada de la siguente gráfica



En dicha región, se observa que si $0 \le x \le 1$, entonces $x - x^2 \le y \le x$; mientras que si $1 \le x \le 2$, entonces $x - x^2 \le y \le 4 - 3x$. De esta forma

$$\iint_D xe^{y-x}dxdy = \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^{x} xe^{y-x}dy + \int_1^2 dx \int_{x-x^2}^{4-3x} xe^{y-x}dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x - xe^{-x^2}\right) dx + \int_1^2 \left(xe^{4-4x} - xe^{-x^2}\right) dx = \ldots = -\frac{1}{16}e^{-4} + \frac{5}{16}$$

:

– –

6. [2 PUNTOS]

a. Resolver la siguiente edo de 1er orden, probando previamente que $\mu(x,y) = xy$ es un factor integrante para la misma:

$$2\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)dx + 3xydy = 0$$

b. Resolver, en función de los valores del parámetro α, la siguiente edo lineal:

$$y''' - 2y'' + \alpha^2 y' - 2\alpha^2 y = 0$$

SOLUCIÓN:

(6.a) Si multiplicamos la edo por $\mu(x,y) = xy$, se obtiene

$$2(xy^3 + x)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

que ya sí que es exacta, puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Resolvemos entonces esta edo exacta:

De

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2(xy^3 + x) \Rightarrow f(x,y) = \int 2(xy^3 + x)dx = x^2y^3 + x^2 + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usarmos que $\frac{\partial f}{\partial y} = N = 3x^2y^2$, por lo que si el primer miembro de esta igualdad lo calculamos derivando la expresión obtenida para f :

$$3x^2y^2 + 0 + g'(y) = 3x^2y^2$$

por lo que habrá de ser $g(y) = cte$. Por tanto la solución de la edo dada nos viene dada por la expresión implícita

$$x^2y^3 + x^2 = cte$$

(6.b) El polinomio característico de la edo es

$$r^3 - 2r^2 + \alpha^2 r - 2\alpha^2 = 0$$

Estudiamos las raíces de esta ecuación según valores de α :

- Si $\alpha = 0$, la ecuación se reduce a $r^3 - 2r^2 = 0$, que tiene por raíces $r_1 = 0$ (doble) y $r_2 = 2$. Por tanto, en este caso la solución general de la edo será

$$y = (C_1x + C_2)e^{0x} + C_3e^{2x} = C_1x + C_2 + C_3e^{2x}$$

- Si $\alpha \neq 0$, la ecuación característica tiene por soluciones $r_1 = 2$ y $r_{2,3} = \pm\alpha i$ (el polinomio característico puede ponerse como $(r-2)(r^2 + \alpha^2)$). Así, la solución general viene dada por

$$y = C_1e^{2x} + e^{0x}(C_2\cos\alpha x + C_3\sin\alpha x) = C_1e^{2x} + C_2\cos\alpha x + C_3\sin\alpha x$$

– –