PRIMER PARCIAL
GRUPO A
CURSO 14-15
12 febrero 2015

1er PARCIAL 2014-2015. ENUNCIADO Y RESUELTO

1. [2 PUNTOS] **Consideremos en** $\mathbb{R}^4$ **los subespacios**

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0;\ x + y + z = 0\} \quad \text{y} \quad W =< (1,-1,1,0),(0,1,0,1) >$$

y sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ **el endomorfismo que verifica:**

$$\ker(f) = V; \qquad f(1,0,0,0) = (1,0,1,1), \qquad f(0,1,0,0) = (1,-2,1,-1)$$

- **a. Calcular la matriz asociada a** f **en bases canónicas.**
- **b. Probar que** $\mathrm{Im}(f) = W$**, y clasificar** f.
- **c. Dada la nueva base** $B = \{(1,2,0,0),(-1,0,2,0),(0,-1,0,2),(0,2,-1,0)\}$**, hallar la matriz de** f **en dicha base,** $M_{B,B}(f)$. **NOTA: Se puede dejar indicado como producto de matrices sin tener que obtener matrices inversas.**

SOLUCIÓN:

(1.a) Al ser $f(1,0,0,0) = (1,0,1,1)$ y $f(0,1,0,0) = (1,-2,1,-1)$, ya conocemos las dos primeras columnas de la matriz pedida. Puesto que

$$\ker(f) = V = \{(z,-2z,z,t)\} =< (0,0,0,1),(1,-2,1,0) >,$$

en particular se tiene que $f(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$ (por lo que también conocemos la cuarta columna). Así, será

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -2 & b & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & -1 & d & 0 \end{pmatrix}$$

y la 3ª columna la obtendremos de exigir que $f(1,-2,1,0) = (0,0,0,0)$, de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.b) El subespacio $\mathrm{Im}(f)$ está generado por las columnas de A, y como el rango de esta matriz es 2 (podemos eliminar la 3ª fila y la 4º columna; mientras que la 1ª fila es la resta de la 4ª y 2ª) podemos poner

$$\mathrm{Im}(f) = < (1,0,1,1),(1,-4,1,-3) >$$

Para comprobar entonces que $\mathrm{Im}(f) = W =< (1,-1,1,0),(0,1,0,1) >,$ nos bastará con ver que la matriz que forman los siguientes 4 vectores (los dos que hemos obtenido para Im(f) y los dos que nos generan W según el enunciado) tiene rango 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(lo que es inmediato, ya que tiene dos columnas iguales y la fila 1º es suma de la 3ª y 4ª).

Como $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$, tendremos que $\dim(\ker f) = 2$, por lo que f ni es inyectiva ni suprayectiva.

(1.c) Aplicando el conocido esquema, resulta ser

$$M_{B,B}(f) = M_{C,B} \times A \times M_{B,C} = M_{B,C}^{-1} \times A \times M_{B,C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{7}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{23}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{29}{6} & \frac{11}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

aunque en el examen no se pide que se calcule este producto.

– –

2. [2 PUNTOS] **Para todo $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} a+9 & -6 & a-3 \\ -6 & a & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

a. Calcular los valores propios de A, según los valores de a.

b. Determinar los valores de a para los que A es diagonalizable.

c. Para $a = 3$ calcular, usando diagonalización, A^{100}. NOTA: Se puede dejar indicado como producto de matrices.

SOLUCIÓN:

(2.a) El polinomio característico viene dado por

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a+9-\lambda & -6 & a-3 \\ -6 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 15-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$(15-\lambda)(\lambda-(a+12))(\lambda-(a-3)) = 0$$

por lo que los valores propios serán $\lambda_1 = 15,\ \lambda_2 = a+12,\ \lambda_3 = a-3,$

(2.b) Vistos los anteriores valores propios, si $a \neq 3,$ y $a \neq 18,$ la matriz será diagonalizable (por tener 3 valores propios distintos). Como además, si $a = 3$ la matriz también es diagonalizable (por ser simétrica), sólo nos falta por estudiar el caso $a = 18$: Se trata entonces de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 27 & -6 & 15 \\ -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

que sabemos tiene por valores propios $\lambda_1 = 15$ (doble) y $\lambda_2 = 27.$ Si calculamos los respectivos subespacios vectoriales, tendremos para V_{λ_1} :

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z)\ :\ A(x,y,z)^T = 15(x,y,z)^T\right\}$$

Si resolvemos este sistema, resulta que tanto y como z dependen de x, por lo que $\dim(V_{\lambda_1}) = 1$ y A no es diagonalizable.

(2.c) Para $a = 3$, resulta la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

que sabemos tiene por valores propios $\lambda_1 = 15$ (doble) y $\lambda_2 = 0.$ Si calculamos los respectivos subespacios vectoriales, tendremos

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z)\ :\ A(x,y,z)^T = 15(x,y,z)^T\right\} =\ldots= \{(-2y,y,z)\} =< (-2,1,0),(0,0,1) >$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z)\ :\ A(x,y,z)^T = 0(x,y,z)^T\right\} =\ldots= \{(x,2x,0)\} =< (1,2,0) >$$

Por lo tanto tenemos dos matrices P y D, tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener A^{100} utilizamos que

$$A^{100} = (PDP^{-1})^{100} = \ldots = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 15^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

– –

3. [2 PUNTOS] **En** $\mathbb{R}^3$ **se consideran los subespacios vectoriales**

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+2y+z = 0\right\}, \qquad B =< (-2,0,1),(0,-4,3) >$$

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+3y-2z = 0\right\}$$

Usando el producto escalar usual, se pide:

- **a. Hallar una base ortonormal de** A.
- **b. Hallar una base para** $A \cap B$ **y otra para** $A+C$.
- **c. Determinar** $A^{\perp}$**, subespacio ortogonal de** A.
- **d. Hallar los valores de** a **para los que** $(2,1,a) \in A \cap C$.
- **e. Determinar la proyección ortogonal del vector** $(-1,-3,2)$ **sobre** C.

SOLUCIÓN:

(3.a) Tenemos que $A = \{(x,y,-x-2y)\} =< (1,0,-1),(0,1,-2) >,$ por lo que si aplicamos el método de G-S:

$$\begin{cases} u_1 = e_1 = (1,0,-1) \\ u_2 = e_2 - \frac{u_1 \bullet e_2}{u_1 \bullet u_1} u_1 = (0,1,-2) - \frac{2}{2}(1,0,-1) = (-1,1,-1) \end{cases}$$

y la base ortonormal será

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)\right\}$$

(3.b) Tenemos que

$$A =< (1,0,-1),(0,1,-2) >, \ C = \{(-3y+2z,y,z)\} =< (-3,1,0),(2,0,1) >$$

por lo que

$$A+C =< (1,0,-1),(0,1,-2),(-3,1,0),(2,0,1) >=< (1,0,-1),(0,1,-2),(-3,1,0) >$$

Así, $\dim(A+C) = 3$, por lo que $A+C = \mathbb{R}^3$.

Para $A \cap B$:

$$\text{Si } (x,y,z) \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-2) \\ (x,y,z) = \gamma(-2,0,1) + \delta(0,-4,3) \end{cases}$$

y resolviendo este sistema, obtenemos que $\alpha = 10\delta,\ \beta = -4\delta,$ por lo que sustituyendo resulta que

$$A \cap B = \{(10\delta, -4\delta, -2\delta)\} =< (10, -4, -2) >$$

NOTA: Otra forma de obtener esta intersección, y teniendo en cuenta que A y B son planos, es hallar el vector director de la recta dada por la intersección de ambos planos (y que puede hallarse a través del producto vectorial de los dos vectores normales de los planos).

(3.c) Se verifica que

$$(x, y, z) \in A^{\perp} \Leftrightarrow (x, y, z) \bullet (1, 0, -1) = (x, y, z) \bullet (0, 1, -2) = 0$$

de donde resulta

$$A^{\perp} = \{(z, 2z, z)\} =< (1, 2, 1) >$$

(3.d) De forma análoga a (3.b), resulta que

$$A \cap C =< (10, -4, -2) >$$

por lo que es imposible que ningún vector de la forma $(2, 1, a)$ esté en $A \cap C$.

(3.e) Se trata de poner

$$(-1, -3, 2) = u + v, \text{ siendo } u \in C \text{ y } v \in C^{\perp}$$

y la proyección ortogonal pedida es el vector u.

Entonces

$$(-1, -3, 2) = u + v = \alpha(-3, 1, 0) + \beta(2, 0, 1) + v$$

y si multiplicamos escalarmente esta igualdad por los vectores de C, tendremos

$$(-1, -3, 2) \bullet (-3, 1, 0) = \alpha(-3, 1, 0) \bullet (-3, 1, 0) + \beta(2, 0, 1) \bullet (-3, 1, 0) + v \bullet (-3, 1, 0)$$

$$(-1, -3, 2) \bullet (2, 0, 1) = \alpha(-3, 1, 0) \bullet (2, 0, 1) + \beta(2, 0, 1) \bullet (2, 0, 1) + v \bullet (2, 0, 1)$$

(notemos que los últimos sumandos de las expresiones anteriores son nulos, ya que $v \in C^{\perp}$), es decir

$$\begin{cases} 0 = 10\alpha - 6\beta \\ 0 = -6\alpha + 4\beta \end{cases}$$

de donde $\alpha = \beta = 0$, y la proyección pedida es $u = \alpha(-3, 1, 0) + \beta(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

NOTA: El resultado es lógico, ya que si obtenemos $C^{\perp}$ (que no ha sido preciso para resolver este apartado), resulta ser $C^{\perp} =< (1, 3, -2) >$, por lo que el vector al que vamos a calcular su proyección ortogonal está en este subespacio. Por tanto, su proyección ortogonal sobre C ha de ser el vector nulo.

_ _

4. [2 PUNTOS] Resolver DOS de los tres apartados siguientes:

a. **Determinar a y b para que la función**

$$f(x) = (a+bx)e^{a+bx}$$

tenga en $x_1 = a-3b$ un mínimo local y en $x_2 = a-4b$ un punto de inflexión.

b. **Calcular el polinomio de Taylor de grado 4 para la función $f(x) = \sqrt{3+x}$ en el punto $a = 1$ y obtener una cota del error cometido al aproximar el valor de $\sqrt{5}$ mediante dicho polinomio.**

c. **Calcular los siguientes límites**

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\log(\sin x)}{(\pi-2x)^2} \qquad y \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\log x}$$

SOLUCIÓN:

(4.a) Se tiene que

$$f'(x) = \ldots = e^{a+bx}(b+ab+b^2x) \qquad y \qquad f''(x) = \ldots = e^{a+bx}b^2(2+a+bx)$$

Sabemos que para que exista un mínimo en x_1 ha de ser $f'(x_1) = f'(a-3b) = 0$, es decir

$$0 = f'(a-3b) = e^{a+b(a-3b)}(b+ab+b^2(a-3b)) =$$
$$= e^{a+b(a-3b)}b(1+a+b(a-3b))$$

y como $e^{a+b(a-3b)} \neq 0$, si suponemos también $b \neq 0$ (el caso $b = 0$ no lo consideramos, ya que en este caso la función de partida es una cte), habrá de ser

$$1+a+b(a-3b) = 0$$

Para tener punto de inflexión en x_2 ha de ser $f''(x_2) = f''(a-4b) = 0$, es decir

$$0 = f''(a-4b) = e^{a+b(a-4b)}b^2(2+a+b(a-4b))$$

debiendo ser entonces

$$2+a+b(a-4b) = 0$$

Si resolvemos el sistema dado por

$$\begin{cases} 1+a+b(a-3b) = 0 \\ 2+a+b(a-4b) = 0 \end{cases}$$

se obtiene $a = b = 1$.

(4.b) Resulta ser

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{3+x} \Rightarrow f(1) = 2 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(3+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{4} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(3+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{32} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(3+x)^{-5/2} \Rightarrow f'''(1) = \frac{3}{256} \\
f^{IV}(x) &= -\frac{15}{16}(3+x)^{-7/2} \Rightarrow f^{IV}(1) = -\frac{15}{2048} \\
f^{V}(x) &= \frac{105}{32}(3+x)^{-9/2} \Rightarrow f^{V}(c) = \frac{105}{32\sqrt{(3+c)^9}}
\end{aligned}
$$

por lo que el polinomio de grado 4 que aproxima a $f(x)$ será

$$P(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{32 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{256 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{15}{2048 \cdot 41}(x-1)^4$$

por lo que

$$\sqrt{5} = \sqrt{3+2} \approx 2 + \frac{1}{4}(2-1) - \frac{1}{32 \cdot 2!}(2-1)^2 + \frac{3}{256 \cdot 3!}(2-1)^3 - \frac{15}{2048 \cdot 41}(2-1)^4 = 2.2361$$

siendo el error el dado por

$$error = \left| \frac{105}{5! \cdot 32\sqrt{(3+c)^9}}(2-1)^5 \right| < \frac{105}{5! \cdot 32\sqrt{(3+1)^9}} = \frac{105}{5! \cdot 32 \cdot 2^9} = 5.3406 \times 10^{-5}$$

y donde hemos tenido en cuenta que $1 < c < 2$.

(4.c) El primero es un límite de la forma $\frac{0}{0}$, que resolvemos aplicando L'Hôpital 2 veces:

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{-4(\pi - 2x)\sin x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\sin x}{8\sin x - 4(\pi - 2x)\cos x} = -\frac{1}{8}$$

El segundo es de la forma 0^0, por lo que si tomamos logaritmos (llamando A a límite que queremos calcular)

$$
\begin{aligned}
\log A &= \log\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{1/\log x}\right) = \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{1/\log x} = \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \log\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)
\end{aligned}
$$

obteniendo entonces un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, que resolvemos por L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x} = -1$$

donde este último límite (de la forma $\frac{0}{0}$) lo hemos resuelto de nuevo por L'Hôpital. Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{1/\log x} = e^{-1}$$

---

5. [2 PUNTOS] **Resolver UNO de los dos apartados siguientes:**

a. Calcular las siguientes integrales

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad y \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$$

b. Expresar el siguiente límite como una integral, y calcular la misma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\sqrt{n^2-3^2}+\ldots\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}$$

SOLUCIÓN:

(5.a) La primera corresponde a un cociente de polinomios, con cte en numerador y raíces complejas en denominador. Por tanto, esta integral es inmediata sin más que completar cuadrados en el denominador (tipo arco tangente):

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1)+cte$$

Para la segunda, realizaremos el cambio $t = e^x$ (donde $x = \log t;\ dx = \frac{dt}{t}$). Además, si $x = 0$, entonces $t = 1$, mientras que si $x = +\infty$, entonces $t = +\infty$. De esta forma

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{\frac{dt}{t}}{t+\frac{1}{t}} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan t]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(5.b) Se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\sqrt{n^2-3^2}+\ldots\sqrt{n^2-n^2}}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n}+\ldots+\frac{\sqrt{n^2-n^2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2-i^2}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Esta última integral la calculamos mediante el cambio $x = \sin t$ (donde $dx = \cos t \cdot dt$). Además, si $x = 0$, entonces $t = 0$, mientras que si $x = 1$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$. De esta forma

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\cdot dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

– –