Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso
Examen Final Junio. Curso 2013/2014
(01/07/2014)

(Incluye la solución de todos los ejercicios propuestos, independientemente que se examine de la asignatura completa y/o del primer o segundo parcial

PRIMER PARCIAL

1. **Consideremos el endomorfismo** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **que verifica:**

$$f(0,1,1) = (0,a,2), \qquad f(0,1,0) = (-5,0,-3), \qquad f(1,-1,0) = (8,-2,6)$$

   a. **Hallar la matriz de** f **en las bases canónicas.**
   b. **Clasificar** f **en función del parámetro** a**.**
   c. **Hallar la matriz de** f **respecto de la base canónica en el conjunto inicial y la base** B **en el final, siendo**

$$B = \{(1,2,0),(0,1,-2),(1,0,1)\}$$

   d. **Calcular** a **para que** 2 **sea un valor propio de** f.

SOLUCIÓN:
(a) Supondremos que la matriz es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y aplicamos las condiciones dadas:

De $f(0,1,0) = (-5,0,-3)$, resulta que la segunda columna es $(a_{12},a_{22},a_{32}) = (-5,0,-3)$.

De $f(0,1,1) = (0,a,2)$:

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ a \\ 5 \end{pmatrix}$$

De $f(1,-1,0) = (8,-2,6)$:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Para clasificar f hemos de estudiar el rango de la matriz A según los valores de a. Puesto que $|A| = \ldots = -6a - 20$, tendremos que si $-6a - 20 \neq 0$, es decir, si $a \neq -\frac{10}{3}$, la matriz tendrá rango 3, por lo que en este caso la aplicación f será inyectiva y suprayectiva ($\dim \operatorname{Im}(f) = 3$, y $\dim \ker(f) = 0$) y por tanto biyectiva, mientras que si $a = -\frac{10}{3}$, entonces rango será 2 (es decir $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$), por lo que no será suprayectiva ni inyectiva (ya que $\dim \ker(f) = 1$).

(c) Se trata de aplicar el esquema

$$\underset{C}{\mathbb{R}^3} -> \underset{C}{\mathbb{R}^3} \to \underset{B}{\mathbb{R}^3}$$

por lo que la nueva matriz pedida será

$$M_{C,B}(f) = M_{C,B} \times M_{C,C}(f) = M_{C,B} \times A = M_{B,C}^{-1} \times A =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(d) Se ha de verificar que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & a \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y realizando operaciones, y para que este sistema sea compatible indeterminado, ha de ser $a = 2$.

_ _

2. **Dada la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. **Estudiar en función de a, si es diagonalizable.**
b. **Para el caso $a = 1$, hallar la matriz diagonal y la matriz de cambio de base, si existen.**
c. **Si $a = 0$, ¿qué valores deben tomar v_2 y v_3 para que $(0, v_2, v_3)$ sea un vector propio asociado al valor propio 0?**

SOLUCIÓN:

(a) Si resolvemos

$$|A| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

resulta ser $\lambda = \{a, 0, 2\}$. Por tanto, si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, la matriz será siempre diagonalizable (al tener 3 valores propios distintos). Veamos qué ocurre si $a = 0$ o $a = 2$:

- Si $a = 0$, los valores propios son $\lambda_1 = 0$ (doble) y $\lambda_2 = 2$. Si calculamos el subespacio vectorial asociado a λ_1 :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que tiene por solución $x = 0, y = z$; de esta forma, $V_{\lambda_1=0} = \{(0,y,y)\} =< (0,1,1) >$, que tiene dimensión 1, lo que quiere decir que A no es diagonalizable.

- Si $a = 2$, los valores propios son $\lambda_1 = 2$ (doble) y $\lambda_2 = 0$. Si calculamos el subespacio vectorial asociado a λ_1 :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que tiene por solución $z = 4x - y$; de esta forma,
$V_{\lambda_1=2} = \{(x,y,4x-y)\} =< (1,0,4),(0,1,-1) >$, que tiene dimensión 2, lo que quiere decir que A si es diagonalizable.

(b) Para $a = 1$ sabemos que A es diagonalizable, puesto que sus valores propios son $\{1,0,2\}$. Vamos a calcular los correspondientes subespacios propios:

$$V_{\lambda_1=1} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =\ldots=< (1,4,4) >$$

Análogamente obtendríamos

$$V_{\lambda_2=0} =< (0,1,1) > \qquad y \qquad V_{\lambda_3=2} =< (0,1,-1) >$$

De esta forma, tendremos que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Para que $(0,v_2,v_3)$ sea un vector propio asociado al valor propio 0 ha de cumplirse que $(0,v_2,v_3) \in< (0,1,1) >$ (este subespacio lo hemos obtenido anteriormente). Por lo tanto, es ha de ser $v_2 = v_3$.

_ _

3. **Un taller eléctrico fabrica dos tipos de circuitos. El circuito sencillo necesita una placa y dos interruptores, y el circuito doble necesita dos placas, un interruptor y un condensador. La fábrica dispone de 500 placas, 400 interruptores y 225 condensadores. El beneficio que se obtiene por cada circuito doble vendido es de 30 euros y por cada sencillo es de 20 euros. Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcular el número de circuitos de cada tipo que se tienen que hacer para obtener un beneficio**

máximo. ¿Cuál sería dicho beneficio?

SOLUCIÓN:

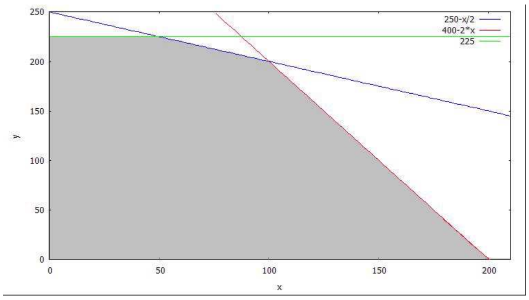
Si denotamos por x al nº de circuitos sencillos y por y al de dobles, tendremos que la función a maximizar vendrá dada por

$$z = 30y + 20x$$

Las restricciones vienen dadas por

$$\text{Placas: } x + 2y \leq 500$$
$$\text{Interruptores: } 2x + y \leq 400$$
$$\text{Condensadores: } y \leq 225$$
$$x, y \geq 0$$

cuya representación gráfica es



siendo sus vértices $A(0,225), B(50,225), C(100,200)$ y $D(200,0)$. Si evaluamos la función objetivo en todos ellos, el máximo corresponde al punto C, con un valor de 8000.

_ _

4. **En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar definido por**

$$(x,y,z) \circ (x',y',z') = 4xx' - 2xz' - 2zx' + 2yy' + yz' + zy' + 2zz'$$

a. **Hallar una base ortonormal a partir de la base** $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$**.**

b. **Determinar la proyección ortogonal del vector** $(-1,3,2)$ **sobre el subespacio** $W = < (-1,1,0),(2,1,3) >$.

SOLUCIÓN:

(a) Se trata de aplicar las ecuaciones del método de G-S:

$$u_1 = e_1 = (1,0,0)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \cdot e_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (1,1,0) - \frac{(1,0,0) \cdot (1,1,0)}{(1,0,0) \cdot (1,0,0)}(1,0,0) =$$
$$= (1,1,0) - \frac{4}{4}(1,0,0) = (0,1,0)$$

$$u_3 = e_3 - \frac{u_1 \cdot e_3}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot e_3}{u_2 \cdot u_2} u_2 =$$
$$= (1,1,1) - \frac{(1,0,0) \cdot (1,1,1)}{(1,0,0) \cdot (1,0,0)}(1,0,0) - \frac{(1,1,0) \cdot (1,1,1)}{(1,1,0) \cdot (1,1,0)}(1,1,0) =$$
$$= (1,1,1) - \frac{2}{4}(1,0,0) - \frac{5}{6}(1,1,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1\right)$$

y ahora cada uno de estos vectores hemos de dividirlo por su módulo:

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1 \cdot u_1} = \sqrt{(1,0,0)\cdot(1,0,0)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2 \cdot u_2} = \sqrt{(0,1,0)\cdot(0,1,0)} = \sqrt{2}$$

$$\|u_3\| = \sqrt{u_3 \cdot u_3} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6},1\right)\cdot\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6},1\right)} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

(b) Se trata de expresar $v = (-1,3,2)$ en la forma $u + w$, donde $u \in W$, y $w \in W^{\perp}$. Así, será

$$v = (-1,3,2) = \alpha(-1,1,0) + \beta(2,1,3) + w$$

y queremos hallar $u = \alpha(-1,1,0) + \beta(2,1,3)$. Para ello vamos a determinar α y β, para lo que multiplicaremos escalarmente la igualdad anterior por los vectores de W.

$$(-1,3,2)\cdot(-1,1,0) = \alpha(-1,1,0)\cdot(-1,1,0) + \beta(2,1,3)\cdot(-1,1,0) + w\cdot(-1,1,0)$$

y

$$(-1,3,2)\cdot(2,1,3) = \alpha(-1,1,0)\cdot(2,1,3) + \beta(2,1,3)\cdot(2,1,3) + w\cdot(2,1,3)$$

es decir

$$16 = 6\alpha + 3\beta + 0$$

$$19 = 3\alpha + 18\beta + 0$$

de donde $\alpha = 7/3$, $\beta = 2/3$, por lo que la proyección será

$$u = \alpha(-1,1,0) + \beta(2,1,3) = \frac{7}{3}(-1,1,0) + \frac{2}{3}(2,1,3) = (-1,3,2)$$

_ _

5. a. **Calcular el siguiente límite**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[x]{\frac{3x+2}{3x-5}}\right)^{x^2+3}$$

b. **Encontrar un valor aproximado para** $\sin(40^{\circ})$ **utilizando un polinomio de Taylor de grado** 3. **Estimar el error cometido.**

SOLUCIÓN:

(a) Se trata de una indeterminación de la forma 1^{∞}, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[x]{\frac{3x+2}{3x-5}}\right)^{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{\frac{x^2+3}{x}} = 1^{\infty}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-5}\right)^{\frac{x^2+3}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x}\left(\frac{3x+2}{3x-5}-1\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{7(x^2+3)}{3x^5-5x}\right) = e^{\frac{7}{3}}$$

(b) En este caso, podemos aproximar la función $\sin(x)$ por su desarrollo de McLaurin (es decir, realizando el desarrollo en el punto $a = 0$), o también por su desarrollo de Taylor en el punto $a = \frac{\pi}{4}$ (por ser éste un valor en el que sabemos calcular tanto la función $\sin(x)$ como sus sucesivas derivadas). Evidentemente, será mejor (el resto será menor) la segunda de estas aproximaciones que la primera (puesto que $\frac{\pi}{4}$ está mas cercano a 40º $= \frac{2\pi}{9}$ que 0). Si lo hacemos entonces de esta segunda forma, se trata de aplicar

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \text{Resto}$$

donde

$$\text{Resto} = \frac{f^{IV}(c)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$$

siendo $\frac{2\pi}{9} < c < \frac{\pi}{4}$.

Si calculamos las sucesivas derivadas en $\frac{\pi}{4}$ y sustituimos x por $\frac{2\pi}{9}$, tendremos

$$\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2!}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{3!}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right)^3 \approx 0.64279$$

siendo una cota del error la dada por

$$\text{Resto} = \left|\frac{f^{IV}(c)}{4!}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right)^4\right| = \left|\frac{sen(c)}{4!}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right)^4\right| < \left|\frac{1}{4!}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right)^4\right| \approx 2.4165 \times 10^{-6}$$

_ _

SEGUNDO PARCIAL

6. **Hallar los extremos absolutos de la función**

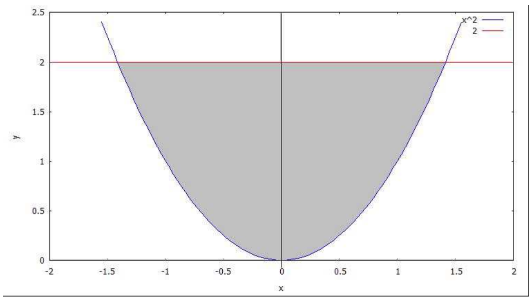
$$f(x,y) = 3(x^2 - 1)y - 2x^4$$

en la región

$$D = \left\{(x,y);\ y \le 2,\ y \ge x^2\right\}$$

SOLUCIÓN:

La representación gráfica de la región D viene dada por la región sombreada siguiente



Los puntos críticos se obtienen de resolver

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 8x^3 = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3 = 0$$

De la 2ª ec. se obtiene $x = \pm 1$, y sustituyendo en la 1ª, resultan como puntos críticos $A\left(1, \frac{4}{3}\right)$ y $B\left(-1, \frac{4}{3}\right)$, siendo ambos interiores a D.

Nos faltan por calcular los posibles puntos críticos en la frontera de D, que está formada por la recta $y = 2$ y por la parábola $y = x^2$. Si los calculamos a lo largo de $y = 2$, resulta que $f(x,y) = f(x) = 6x^2 - 6 - 2x^4$, cuyos puntos críticos son $\left\{0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$; es decir, tenemos $C(0,2)$, $D\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right)$ y $E\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right)$. Si los calculamos a lo largo de $y = x^2$, resulta que $f(x,y) = f(x) = x^4 - 3x^2$, cuyos puntos críticos son $\left\{0, \pm\sqrt{3}\right\}$; es decir, tenemos $F(0,0)$, $G\left(\sqrt{3}, 3\right)$ y $H\left(-\sqrt{3}, 3\right)$. Solo hemos de evaluar f en todos los puntos obtenidos, resultando que el mínimo absoluto está en C (con valor -6) y el máximo absoluto en F, G y H (con valor 0).

– –

7. **Calcular la siguiente integral**

$$\iiint_V z(x^2 + y^2)dxdydz$$

siendo V el volumen exterior a la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$.

SOLUCIÓN:

El volumen V es el comprendido entre el exterior del cono e interior al cilindro, entre $z = 0$ y $z = 1$, mientras que la proyección de este volumen sobre el plano $0XY$ es el círculo unidad. Si efectuamos un cambio a coordenadas cilíndricas, tendremos

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ z = z,\ J = r, \text{ siendo } 0 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

mientras que $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} = r$. Por tanto

$$\iiint_V z(x^2 + y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^r zr^2 r dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^5}{2} dr = \frac{\pi}{6}$$

– –

8. **Resolver la ecuación diferencial**

$$xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$$

con la condición $y(1) = -1$.

SOLUCIÓN:

Si expresamos la edo en la forma

$$\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$$

observamos que se trata de una edo homogénea. Realizando el cambio $y = vx$ (siendo por tanto $dy = vdx + xdv$), tendremos

$$\left(vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2}\right)dx - x(vdx + xdv) = 0$$

que podemos expresar como una edo en variables separadas de la forma

$$x\sqrt{1 - v^2}\, dx - x^2 dv = 0$$

es decir

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

por lo que

$$\log(x) = \arcsin(v) + C$$

es decir‘

$$\log(x) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

Para hallar C, al ser $y(1) = -1$:

$$\log(1) = \arcsin\left(\frac{-1}{1}\right) + C \Leftrightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} + C$$

de donde $C = \frac{\pi}{2}$.

— —

9. **Dada la función** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **definida por**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

estudiar la continuidad y diferenciabilidad en $(0,0)$**. ¿Cual es la ecuación del plano tangente a la gráfica de** f **en el punto** $(1,0)$**?**

SOLUCIÓN:

Para estudiar la continuidad en $(0,0)$ solo hemos de resolver el siguiente límite (lo que hacemos directamente mediante un cambio a polares y aplicando equivalencias)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r^2} = 1 = f(0,0)$$

Por lo tanto, f es continua en $(0,0)$.

Para estudiar su diferenciabilidad, hemos de probar que

$$\lim_{(xh,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

por lo que primero habremos de obtener las derivadas parciales en $(0,0)$, lo que haremos usando la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{e^{t^2}-1}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t^2}-1-t^2}{t^3} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{e^{t^2}-1}{t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t^2}-1-t^2}{t^3} = 0$$

(donde estos últimos límites los hemos resuelto aplicando L’Hôpital). Por lo tanto

$$\lim_{(xh,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(xh,k)\to(0,0)} \frac{\frac{e^{h^2+k^2}-1}{h^2+k^2} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(xh,k)\to(0,0)} \frac{e^{h^2+k^2} - 1 - (h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1-r^2}{r^{3/2}} = 0$$

(donde hemos efectuado un cambio a polares en el límite doble y el límite resultante lo hemos obtenido por L'Hôpital). Por tanto, f es diferenciable en $(0,0)$.

Nos falta por obtener la ecuación del plano tangente en $(1,0)$, que viene dada por

$$z - f(1,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)$$

y puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 2$$

(estas derivadas parciales las hemos obtenido directamente derivando en $f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ y particularizando en $(1,0)$), tendremos que la ecuación del plano es

$$z - (e-1) = 2(x-1) + 2(y-0)$$

– –

10. **Probar que la ecuación**

$$x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) = 1$$

define una función implícita $z = z(x,y)$ **en un entorno del punto** $\left(0,\sqrt{2},1\right)$**. Hallar el plano tangente a la superficie** $z = z(x,y)$ **en el punto** $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

SOLUCIÓN:

Puesto que

$$\varphi(x,y,z) = x^2y - y^2x + z^2\cos(xz) - 1$$

verifica que

$$\varphi\left(0,\sqrt{2},1\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{\left(0,\sqrt{2},1\right)} = 2z\cos(xz) + z^2\sin(xz)x\Big|_{\left(0,\sqrt{2},1\right)} = 2 \neq 0$$

es cierto que la expresión define una función implícita $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $\left(0,\sqrt{2},1\right)$.

La ecuación del plano tangente viene dada por

$$z - z\left(0,\sqrt{2}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\left(0,\sqrt{2}\right)(x-0) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(0,\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)$$

Las derivadas parciales de z las calcularemos a partir de la expresión

$$x^2y - y^2x + z(x,y)^2\cos(x \cdot z(x,y)) = 1$$

por lo que si derivamos respecto de x :

$$2xy - y^2 + 2zz_x\cos(xz) - z^2\sin(xz)(z + xz_x) = 0$$

y particularizando en $\left(0,\sqrt{2}\right)$ se llega a $z_x\left(0,\sqrt{2}\right) = 1$. De igual forma, si derivamos respecto de y :

$$x^2 - 2yx + 2zz_y\cos(xz) - z^2\sin(xz)(xz_y) = 0$$

y particularizando en $\left(0,\sqrt{2}\right)$ se llega a $z_y\left(0,\sqrt{2}\right) = 0$.

La ecuación del plano tangenteserá

$$z - 1 = 1(x-0) + 0\left(y-\sqrt{2}\right)$$

es decir

$$z = x + 1$$