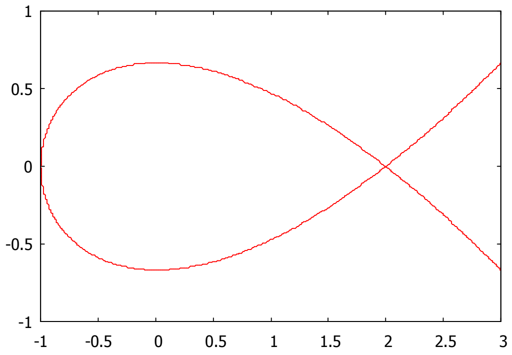
Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A
2do Parcial. Curso 2013/2014
(29/05/2014)

ENUNCIADO Y RESUELTO

1. $\left[2\ \textit{puntos}\right]$ **Calcular la longitud del bucle de la curva dada por**

$$9y^2 = (x-2)^2(1+x)$$

SOLUCIÓN: La representación gráfica de la curva viene dada por



por lo que calcularemos la longitud de una de las dos ramas (entre -1 y 2) y multiplicaremos por 2.

Sabemos que la longitud de una curva viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

lo que en nuestro caso sería

$$L = 2\int_{-1}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

Como

$$y = \pm\frac{x-2}{3}\sqrt{1+x}$$

si tomamos el signo +, tendremos

$$y' = \ldots = \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

por lo que

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\right)^2} = \ldots = \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}}$$

Así, se trata de resolver

$$L = 2\int_{-1}^{2} \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}} dx = \int_{-1}^{2} \frac{x+2}{\sqrt{1+x}} dx = \ldots = 4\sqrt{3}$$

(Esta integral la hemos resuelto mediante el cambio de variable $t^2 = 1+x$; obteniéndose una integral inmediata en variable t).

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

2. $\left[1,5\ puntos\right]$ **Dadas** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **y** $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ **definidas por**

$$f(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}, x^2 - y^2, \pi(xy + y^2)\right)$$

$$g(u,v,w) = (v + \log(u), \sin(v + w))$$

calcular la matriz jacobiana de la composición $g \circ f$ **en el punto** $(1,1)$.

SOLUCIÓN: Este ejercicio puede resolverse calculando primero la composición $g \circ f$ (y derivando después), o bien derivando primero f y g por separado y aplicando posteriormente la regla de la cadena. Lo hacemos de la segunda forma:

Si calculamos por separado cada una de las matrices jacobianas, se tiene

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \\ 2x & -2y \\ \pi y & \pi(x+2y) \end{pmatrix}; \qquad Jg(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 1 & 0 \\ 0 & \cos(v+w) & \cos(v+w) \end{pmatrix}$$

por lo que, por la regla de la cadena

$$J(g \circ f)(x,y) = Jg(f(x,y)) \times Jf(x,y)$$

y si particularizamos en el punto $(x,y) = (1,1)$, tendremos

$$J(g \circ f)(1,1) = Jg(f(1,1)) \times Jf(1,1) = Jg(e^2, 0, 2\pi) \times Jf(1,1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2e^2 & 2e^2 \\ 2 & -2 \\ \pi & 3\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \pi + 2 & 3\pi - 2 \end{pmatrix}$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

3. $\left[1\ punto\right]$ **Hallar los extremos relativos que alcanza la función**

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

SOLUCIÓN: Obtenemos los puntos críticos a través de la resolución del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

obteniéndose (despejamos en la 2ª ec. y sustituimos en la 1ª)

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

que tiene por soluciones $x = \pm 2, \pm 1$. Así, tenemos los puntos críticos $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$ y $(-1,-2)$. Vamos a particularizar el hessiano en cada uno de ellos: Puesto que

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix}$$

tendremos

$$Hf(2,1) = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} > 0 \quad Hf(-2,-1) = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} > 0$$

por lo que $(2,1)$ es mínimo relativo y $(-2,-1)$ máximo relativo. De igual manera, al ser

$$Hf(1,2) = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} < 0 \quad Hf(-1,-2) = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} < 0$$

los puntos $(1,2)$ y $(-1,-2)$ serán puntos de silla.

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

4. $\left[1,5\ \textit{puntos}\right]$ **Obtener el polinomio de Taylor de grado** 2 **y en el punto** $(a,b) = (1,1)$ **para la función** $z = z(x,y)$, **que viene definida de manera implícita por la expresión**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) = xy - x - y + z^2$$

siendo $z(1,1) = 1$.

SOLUCIÓN: El polinomio pedido viene dado por la expresión

$$P(x,y) = z(1,1) + \left(z_x(1,1)(x-1) + z_y(1,1)(y-1)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(z_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2z_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + z_{yy}(1,1)(y-1)^2\right)$$

por lo que hemos de calcular las correspondientes derivadas parciales a partir de la expresión

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z(x,y)\right) = xy - x - y + z^2(x,y)$$

Derivando respecto de x :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2}z_x = y - 1 + 2zz_x$$

y respecto de y

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2}z_y = x - 1 + 2zz_y$$

de donde

$$z_x = \frac{y-1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z}; \qquad z_y = \frac{x-1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z}$$

por lo que

$$z_x(1,1) = z_y(1,1) = 0$$

Volviendo a derivar, obtenemos

$$z_{xx} = -\frac{(y-1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 z_x - 2z_x\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z\right)^2}; \qquad z_{yy} = -\frac{(x-1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 z_y - 2z_y\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z\right)^2}$$

por lo que

$$z_{xx}(1,1) = z_{yy}(1,1) = 0$$

mientras que

$$z_{xy} = \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z\right) - (y-1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 z_y - 2z_y\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z\right)^2}$$

siendo entonces

$$z_{xy}(1,1) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2} = \frac{2}{\pi - 4}$$

De esta forma

$$P(x,y) = 1 + (0(x-1) + 0(y-1)) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(0(x-1)^2 + 2\frac{2}{\pi-4}(x-1)(y-1) + 0(y-1)^2\right) = 1 + \frac{2}{\pi-4}(x-1)(y-1)$$

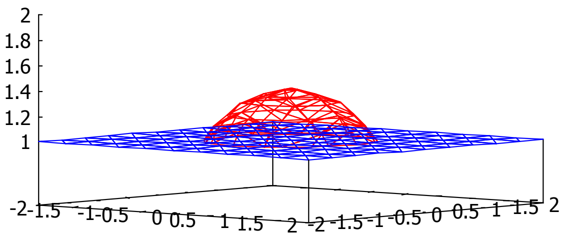
– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

5. $\left[2\ \textit{puntos}\right]$ **Calcular**

$$\iiint_V z dxdydz$$

siendo V **el volumen situado por encima del plano** $z = 1$ **e interior a la esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = 2$**. Calcular también el volumen de** V.

SOLUCIÓN: La representación de la región V puede verse en la gráfica siguiente



siendo la intersección de ambas superficies el círculo $x^2 + y^2 = 1$).

En un primer caso calcularemos la integral realizando un cambio a coordenadas cilíndricas, por lo que tendremos que

$$x = \rho\cos(\theta);\ y = \rho\sin(\theta);\ z = z;\ J = \rho$$

donde (al ser la proyección sobre el plano XY el círculo $x^2 + y^2 = 1$)

$$0 < \rho < 1;\ 0 < \theta < 2\pi;\ 1 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2} = \sqrt{2 - \rho^2}$$

Entonces

$$\iiint_V z dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_1^{\sqrt{2-\rho^2}} z\rho dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\left(\frac{2-\rho^2}{2} - \frac{1}{2}\right) d\rho = \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Para el volumen de V, tendremos

$$Vol(V) = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_1^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\left(\sqrt{2-\rho^2} - 1\right) d\rho = \ldots = \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – –

6. $\left[2\ puntos\right]$ **Resolver las siguientes edo's:**

$$a) \qquad \left(3ty + \frac{\cos(t)}{t}\right)dt + \left(2t^2 + \frac{\sin(t)}{ty}\right)dy = 0$$

$$b) \qquad y'' - 2y' + y = e^t + 3$$

(Para resolver (a), probar previamente que admite a $\mu(t,y) = ty$ como factor integrante).

SOLUCIÓN:

(a) Si multiplicamos toda la edo por $\mu(t,y) = ty$, tendremos

$$(3t^2y^2 + y\cos(t))dt + (2t^3y + \sin(t))dy = 0$$

y podemos comprobar que se trata de una edo exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t^2y + \cos(t) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces hemos de hallar una $f(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = M(t,y) = 3t^2y^2 + y\cos(t)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(t,y) = 2t^3y + \sin(t)$$

De la primera de estas expresiones se tiene que

$$f(t,y) = \int(3t^2y^2 + y\cos(t))dt = t^3y^2 + y\sin(t) + g(y)$$

Para determinar esta $g(y)$ usaremos que $2t^3y + \sin(t) = \frac{\partial f}{\partial y}$, es decir, que

$$2t^3y + \sin(t) = 2t^3y + \sin(t) + g'(y)$$

por lo que

$$g'(y) = 0$$

es decir,

$$g(y) = K$$

Por tanto, la solución general de la edo exacta (y por tanto de la edo inicial) es $f(t,y) = cte$, esto es

$$t^3y^2 + y\sin(t) + K = cte$$

o lo que es lo mismo

$$t^3y^2 + y\sin(t) = C$$

(b) Se trata de una edo lineal de 2º orden, de coeficientes constantes y no homogénea. Por tanto aplicaremos que $y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH}$. Hallamos cada una de éstas por separado:

- La ec. característica de la edo homogénea asociada es

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

que tiene por raíz $r = 1$ (doble). Por tanto, será

$$y_{GH} = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

- Como solución particular de la edo no homogénea tomaremos

$$y_{PNH} = A + Bt^2 e^t$$

(multiplicamos por t^2 para evitar la repetición de términos que aparecen en y_{GH}). Si sustituimos esta expresión en la edo original, se llega a $A = 3$ y $2B = 1$.

Por tanto, la solución de la edo es

$$y_{GNH} = C_1 e^t + C_2 t e^t + 3 + \frac{1}{2} t^2 e^t$$