Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A
Final Septiembre. Curso 2012/2013
(11/09/2013)

EXAMEN FINAL: Enunciado y resuelto

1. **De un endomorfismo** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **se sabe que:**

$$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - y + 2x = 0\}$$

y que $(1,0,-1)$ **es un vector propio de** f **de valor propio** 2.

Calcular:

1.a **La matriz de** f **respecto de las bases canónicas.**

1.b **La dimensión y la ecuación de la imagen de** f **y estudiar la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.**

1.c **La matriz de** f **respecto de la base** B **en el conjunto inicial y final, siendo**

$$B = \{(1,2,0),(0,-1,2),(1,1,-2)\}$$

(Nota: no es preciso calcular la matriz la matriz inversa; basta con dejarlo planteado)

SOLUCIÓN:

(1.a) Denotemos a la matriz por

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

y vamos a hallar todos estos coeficientes.

Por un lado, se tiene que

$$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - y + 2x = 0\} = \{(x,y,-2x+y)\} =< (1,0,-2),(0,1,1) >$$

por lo que $f(1,0,-2) = f(0,1,1) = (0,0,0)$; es decir, que tenemos las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como también sabemos que $(1,0,-1)$ es un vector propio de f de valor propio 2, tendremos

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo entonces los correspondientes sistemas, se llega a que

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(1.b) Como $\dim(\ker(f)) = 2$, se tiene que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$, lo que es evidente, ya que

$$\mathrm{Im}(f) =< \text{columnas de } A >=< (2,0,-2) >$$

Por tanto podemos asegurar que f no es ni inyectiva ni suprayectiva.

(1.c) Realizando el típico esquema habitual, se tiene

$$\underset{B}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{B}{\mathbb{R}^3}$$

es decir

$$M_{B,B}(f) = M_{C,B}(Id) \times M_C(f) \times M_{B,C}(Id)$$

de donde

$$M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

– –

2. **Para ciertos $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}$, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo cuya matriz asociada en la base canónica es**

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

2.a **Estudiar en función de a y b si f es diagonalizable.**

2.b **Para $\mathbf{a} = -1$ y $\mathbf{b} = 1$, hallar la matriz diagonal y las matrices de cambio de base.**

2.c **Calcular A^{25}.**

SOLUCIÓN.

(2.a) En primer lugar obtenemos los valores propios de A : De

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}-\lambda & \mathbf{b} & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

resulta que los valores propios son $\lambda = \{\mathbf{a},1,2\}$. Así distinguimos:

- Si $\mathbf{a} \neq 1,2$, entonces la matriz tiene 3 valores propios distintos, por lo que es diagonalizable.

- Si $\mathbf{a} = 1$, los valores propios son $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$ (simple). Calcularemos entonces sus vectores propios asociados:

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

y resolviendo este sistema se llega a que $z = 0$, $\mathbf{b}y = 0$. Por tanto, si $\mathbf{b} = 0$, tendríamos

$$V_{\lambda_1} = \{(x,y,0)\} < (1,0,0),(0,1,0) >$$
que al tener dimensión 2, es diagonalizable. Pero si $\mathbf{b} \neq 0,$ entonces $y = 0$, con lo que
$$V_{\lambda_1} = \{(x,0,0)\} < (1,0,0) >$$
por lo que no será diagonalizable.

- Si $\mathbf{a} = 2,$ los valores propios son $\lambda_1 = 1$ (simple) y $\lambda_2 = 2$ (doble). Calcularemos entonces sus vectores propios asociados:
$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$
y resolviendo este sistema se llega a que $\mathbf{b}y = 0, y = 2z.$ Por tanto, si $\mathbf{b} = 0,$ tendríamos
$$V_{\lambda_2} = \{(x,2z,z)\} < (1,0,0),(0,2,1) >$$
que al tener dimensión 2, es diagonalizable. Pero si $\mathbf{b} \neq 0,$ entonces $y = 0 = z$, con lo que
$$V_{\lambda_2} = \{(x,0,0)\} < (1,0,0) >$$
y no es diagonalizable.

(2.b) En este caso sabemos que la matriz es diagonalizable al ser sus valores propios $\lambda = \{-1,1,2\}$. Calcularemos su vectores propios asociados:
$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =\ldots= \{(x,0,0)\} =< (1,0,0) >$$
$$V_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =\ldots= \{(x,2x,0)\} =< (1,2,0) >$$
$$V_{\lambda_3} = \left\{ (x,y,z);\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} =\ldots= \left\{\left(\frac{2z}{3},2z,z\right)\right\} =< \left(\frac{2}{3},2,1\right) >$$
Por lo tanto, existen P y D, tal que $P^{-1} \times A \times P = D$, siendo
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.c) Se verifica que
$$A^{25} = (P \times A \times P^{-1})^{25} = P \times D^{25} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 22\,369\,620 \\ 0 & 1 & 67\,108\,862 \\ 0 & 0 & 33\,554\,432 \end{pmatrix}$$

– –

3. **Resolver los apartados siguientes :**

3.a **Calcular el límite:**

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)$$

3.b **Sea** $f(x) = x\log(1+x)$**. Escribir la fórmula de McLaurin para** $f(x)$ **de orden** n **con el resto de Lagrange y dar una cota del error cuando se aproxima** $\frac{1}{10}\log\left(\frac{11}{10}\right)$ **mediante el polinomio de McLaurin obtenido anteriormente de grado** 3.

SOLUCIÓN:

(3.a) Se trata de una indeterminación de la forma $\infty \cdot 0$, por lo que para aplicar L'Hôpital lo pondremos en la forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x}} = L'Hôpital = \ldots = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1$$

(3.b) Como la fórmula de Mclaurin para $\log(1+x)$ es conocida, para establecer la correspondiente a $f(x) = x\log(1+x)$ es suficiente con multiplicar por x la primera, es decir

$$f(x) = x\log(1+x) = x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+Resto \text{ de } \log(1+x)\right)$$

es decir (sustituyendo *Resto* de $\log(1+x)$ por su expresión)

$$f(x) = x\log(1+x) = x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+\ldots+x\cdot(-1)^n\frac{(1+c)^{-n-1}}{n+1}x^{n+1}$$

o lo que es lo mismo

$$f(x) = x\log(1+x) = x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{(1+c)^{-n-1}}{n+1}x^{n+2}$$

(Nota: Este mismo resultado se puede obtener si se deriva n veces la función dada y se aplica la fórmula correspondiente).

Para aproximar la expresión pedida hemos de sustituir en el polinomio de grado 3 anterior (es decir, en $x^2-\frac{x^3}{2}$) la x por $\frac{1}{10}$, donde el error viene dado por el término de grado 4, es decir

$$Error = \left|(-1)^2\frac{(1+c)^{-2-1}}{2+1}\left(\frac{1}{10}\right)^{2+2}\right| = \left(\frac{1}{10}\right)^4\frac{1}{3(1+c)^3} < \left(\frac{1}{10}\right)^4\frac{1}{3(1+0)^3} = 3.3333\times 10^{-5}$$

(Nota: Este mismo resultado se puede obtener si se deriva 4 veces la función dada y se aplica la fórmula correspondiente).

_ _

4. **Hallar los extremos absolutos de**

$$f(x,y) = x^2+2y^2-2x+3$$

en la región

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 10\}$$

SOLUCIÓN: Calcularemos en primer lugar los puntos críticos de f en el interior de D (que es el círculo $x^2+y^2=10$):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x-2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=A(1,0)\in int(D)$$

Y ahora obtenemos los puntos críticos en su frontera, para lo que aplicamos multiplicadores de Lagrange: Sea por tanto

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-2x+3+\lambda(x^2+y^2-10)$$

de donde

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x-2+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\lambda x-1=0 \\ 2y(2+\lambda)=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

De la 2ª ec. resulta que $y=0$, o $\lambda=-2$. Si tomamos $y=0$, de la última ec. se obtiene $x=\pm\sqrt{10}$, por lo que tenemos los puntos críticos $B\left(\sqrt{10},0\right)$ y $C\left(-\sqrt{10},0\right)$; si $\lambda=-2$, sustituyendo en la 1ª ec. resulta que $x=-1$, y sustituyendo en la 3ª ec. se llega a que $y=\pm 3$; obtenemos así los puntos $D(-2,3)$ y $E(-2,-3)$.

Evaluamos entonces f en los 5 puntos obtenidos, y como tenemos que $f(A)=3$, $f(B)=13-2\sqrt{10}$, $f(C)=13+2\sqrt{10}$, $f(D)=24$ y $f(E)=24$, resultará que el mínimo absoluto se alcanza en A, mientras que el máximo absoluto está en D y E.

---

5. **Calcular la integral doble**

$$\iint_D (x^2+y)\,dxdy$$

siendo D **el anillo comprendido entre las circunferencias** $x^2+y^2=1$ **y** $x^2+y^2=5$.

SOLUCIÓN: Lo mejor es realizar un cambio a coordenadas polares, ya que en la región comprendida entre ambas circunferencias se tiene que

$$1<r<\sqrt{5} \text{ mientras que } 0<\theta<2\pi, \text{ siendo } J=r$$

Por tanto

$$\iint_D (x^2+y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{5}} \left((r\cos(\theta))^2+r\sin(\theta)\right) r\,dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3\cos 2\theta - \frac{1}{3}\sin\theta + \frac{5}{3}(\sin\theta)\sqrt{5}+3\right) d\theta = 6\pi$$

---

6. **Probar que la ecuación**

$$x^3z-z^3yx=0$$

define a la variable z **como función implícita de** x **e** y **en las proximidades del punto** $(1,1,1)$**. Hallar la ecuación del plano tangente a la función** z **en dicho punto.**

SOLUCIÓN: Sea $\Phi(x,y,z) = x^3 z - z^3 yx = 0.$ Puesto que se verifica que $\Phi(1,1,1) = 0$, y que $\frac{\partial\Phi}{\partial z}(1,1,1) = (x^3 - 3z^2 yx)\ |_{(1,1,1)} = -2 \neq 0$, es cierto que z es función implícita de x e y en las proximidades del punto $(1,1,1)$. Necesitamos obtener $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$:

Si en la expresión

$$x^3 \bullet z(x,y) - z^3(x,y) \bullet y \bullet x = 0$$

derivamos respecto de x y particularizamos en el punto $(1,1)$, resulta $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 1;$ de igual forma, si derivamos respecto de y y particularizamos en $(1,1)$, resulta $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2}$. Por tanto la ecuación del plano tangente pedida viene dada por

$$z - z(1,1) = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

es decir

$$z - 1 = 1(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$$

----

7. **Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales**

$$a)\qquad (x - y^2 + 3)dy + (x + y + 1)dx = 0$$

$$b)\qquad y'' - 2y' - 15y = -(15x^2 + 4x + 13)$$

SOLUCIÓN:

(7.a) Se tiene que $M(x,y) = x + y + 1$, mientras que $N(x,y) = x - y^2 + 3$. Así, y puesto que $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial c}$, se trata de una edo exacta. Para hallar su solución general usamos que $M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, de donde

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (x + y + 1)dx = \frac{x^2}{2} + yx + x + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usaremos que $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$, por lo que

$$x - y^2 + 3 = 0 + x + 0 + g'(y)$$

Así, $g'(y) = -y^2 + 3$, de donde $g(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y$. Por tanto la solución general viene dada por

$$f(x,y) = cte \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^3}{3} + 3y = cte$$

(7.b) La edo lineal homogénea de grado 2 tiene por solución general (ya que las raíces del polinomio característico $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$ son 5 y –3)

$$Y_{GH} = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$$

Para hallar la solución particular de la no homogénea, probaremos con una expresión de la forma

$$Y_{PNH} = Ax^2 + Bx + C$$

y si sustituimos esta expresión en la edo inicial, resulta

$$2A - 2(2Ax + B) - 15(Ax^2 + Bx + C) = -(15x^2 + 4x + 13)$$

e igualando los términos respectivos, $A = 1,\ B = 0$ y $C = 1$, por lo que la solución general será

$$Y_{GNH} = Y_{GH} + Y_{PNH} = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x} + (x^2 + 1)$$