MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A
Final Junio. Curso 2012/2013
(13/06/2013)

ENUNCIADO Y RESUELTO

(**incluye todas las preguntas del examen final y de las repeticiones del 1er y 2º parcial**)

1. **De un endomorfismo** $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ **se sabe que:**

$$\ker(f) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : z - y + 2x = 0,\ t = 0\right\}$$

$$f(1,0,-1,0) = f(0,2,-1,1) = (0,1,1,0)$$

Calcular:

1.a **La matriz de** f **respecto de las bases canónicas.**

1.b **La dimensión y la ecuación de la imagen de** f **y estudiar la inyectividad y supráyectividad de la aplicación.**

1.c **La matriz de** f **respecto de la base** B **en el conjunto inicial y de la canónica en el final, siendo**

$$B = \{(1,2,0,-1),(0,0,1,-2),(0,-1,2,0),(1,1,1,-1)\}$$

SOLUCIÓN:

(1.a) De las ecuaciones de ker(f) obtenemos que

$$\ker(f) = \{(x,y,y-2x,0)\} = < (1,0,-2,0),(0,1,1,0) >$$

Por tanto, vamos a calcular una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

sabiendo que se cumplen las condiciones

$$f(1,0,-2,0) = f(0,1,1,0) = (0,0,0,0);\ f(1,0,-1,0) = f(0,2,-1,1) = (0,1,1,0)$$

Si planteamos estas igualdades en forma matricial, obtenemos

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y resolviendo los correspondientes sistemas se llega a que la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.b) La imagen de *f* está generada por las columnas de la matriz anterior, por lo que

$$\mathrm{Im}(f) = < (0,1,1,0) >$$

Además *f* no puede ser ni inyectiva ni suprayectiva.

(1.c) Tendremos que aplicar el esquema siguiente

$$\underset{B}{\mathbb{R}^4} \to \underset{C}{\mathbb{R}^4} \xrightarrow{f} \underset{C}{\mathbb{R}^4}$$

Por tanto se tiene

$$M_{B,C}(f) = M_C(f) \times M_{B,C}$$

es decir

$$M_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

– –

2. **Para ciertos $m,n \in \mathbb{R}$, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo cuya matriz asociada en la base canónica es**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

2.a **Estudiar si existen algunos valores de m y n para los que f es diagonalizable.**

2.b **Si para algún valor de m y n es diagonalizable, hallar la matriz diagonal y las matrices de cambio de base.**

SOLUCIÓN:

(2.a) Evidentemente, si $m = 0$ y $n = 2$ la matriz será diagonalizable (al ser simétrica). Pero ¿existirán más valores? Para responder a esta cuestión calculamos sus valores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & m & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & n^2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de manera que se obtiene la ecuación

$$5\lambda^2 - 12n^2 - 7\lambda - \lambda^3 + 4n^2\lambda + 3 = 0$$

cuyas soluciones son: $3,\ 1-2n$ y $2n+1.$ Si $n \neq 0$, como son 3 valores reales y distintos, la matriz será diagonalizable. Veamos lo que ocurre para el caso $n = 0$, es decir cuando los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$ (doble):

- Calcularemos el subespacio vectorial propio asociado a $\lambda_2 = 1$, para lo que resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & m & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow z = 0,\ x = -\frac{my}{2}$$

Así, $S_{\lambda_2} = \left\{\left(-\frac{my}{2}, y, 0\right)\right\} =< (-m,2,0) >$, que tiene dimensión 1, por lo que no es diagonalizable cuando $n = 0$.

(2.b) Vamos a resolver este apartado para el caso en que $m = 0$ y $n = 2$ (de forma análoga podríamos haberlo hecho para el caso en que los valores propios son $3,\ 1-2n$ y $2n+1,$ con $n \neq 0$). En este caso, la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios resultan de resolver

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 45 = 0$$

es decir: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -3$. Si obtenemos cada subespacio propio asociado, tendremos:

- Para $\lambda_1 = 3$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0$$

por lo que $S_{\lambda_1} = \{(x,0,0)\} =< (1,0,0) >$.

- De forma análoga resulta ser $S_{\lambda_2} = \{(0,y,y)\} =< (0,1,1) >$ y $S_{\lambda_3} = \{(0,y,-y)\} =< (0,1,-1) >$.

Por tanto, se verifica que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$D = diag(3,5,-3) \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

---

3. **En $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación bilineal definida por**

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = xx' + 2yy' + 2zz'$$

Con esta definición, se pide:

3.a **Hallar una base ortonormal de los subespacios W y $W^{\perp}$, siendo**

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y - 4z = 0\right\}$$

3.b **Determinar la proyección ortogonal del vector $(-1,3,2)$ sobre W.**

SOLUCIÓN:

(3.a) Se tiene que

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y - 4z = 0\right\} = \{(x, 2x-4z, z)\} =< (1,2,0),(0,-4,1) >$$

Por tanto, si $(x,y,z) \in W^{\perp}$ tendrá que ser

$$\left\{ \begin{array}{c} (x,y,z)\cdot(1,2,0) = 0 \\ (x,y,z)\cdot(0,-4,1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 4y = 0 \\ -8y + 2z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = -4y;\ z = 4y$$

(donde en el producto escalar anterior hemos aplicado la definición del enunciado). Por tanto, $W^{\perp} = \{(-4y, y, 4y)\} =< (-4,1,4) >$.

Una base ortonormal para $W^{\perp}$ es inmediata, ya que al tener $W^{\perp}$ un único vector, sólo hemos de dividir por su módulo, de manera que al ser

$$\|(-4,1,4)\| = \sqrt{(-4,1,4)\cdot(-4,1,4)} = \sqrt{50}$$

donde se ha tenido en cuenta la definición que nos dan de producto escalar para calcular el módulo (ojo: no hay que usar el producto escalar canónico, sino el producto escalar que nos da el enunciado; y ésto hay que hacerlo en todo el ejercicio)

$$W^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{50}} < (-4,1,4) >$$

es base ortonormal para $W^{\perp}$.

Para W :

$$u_1 = e_1 = (1,2,0)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \cdot e_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (0,-4,1) - \frac{(1,2,0)\cdot(0,-4,1)}{(1,2,0)\cdot(1,2,0)}(1,2,0) =$$

$$= (0,-4,1) - \frac{-16}{3}(1,2,0) = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & \frac{20}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la base ortonormal para W será la dada por $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}\right\}$, donde

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1 \cdot u_1} = 3$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2 \cdot u_2} = \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + \frac{800}{9} + 1}$$

donde de nuevo estos productos escalares se han obtenido usando el producto escalar dado en el enunciado.

(3.b) Se trata de poner $(-1,3,2) = u + v$, donde $u \in W$ y $v \in W^{\perp}$, siendo el valor del vector u la proyección pedida. Al ser $u \in W =< (1,2,0),(0,-4,1) >$ y $v \in W^{\perp} =< (-4,1,4) >$, se tiene

$$(-1,3,2) = \alpha(1,2,0) + \beta(0,-4,1) + \gamma(-4,1,4)$$

por lo que para hallar α y β multiplicaremos escalarmente (usando el producto escalar definido en el enunciado) por los vectores de W :

$$\left\{ \begin{array}{c} (-1,3,2)\cdot(1,2,0) = \alpha(1,2,0)\cdot(1,2,0) + \beta(0,-4,1)\cdot(1,2,0) + \gamma(-4,1,4)\cdot(1,2,0) \\ (-1,3,2)\cdot(0,-4,1) = \alpha(1,2,0)\cdot(0,-4,1) + \beta(0,-4,1)\cdot(0,-4,1) + \gamma(-4,1,4)\cdot(0,-4,1) \end{array} \right.$$

es decir

$$\left\{ \begin{array}{c} 11 = 9\alpha - 16\beta \\ -20 = -16\alpha + 38\beta \end{array} \right.$$

de donde

$$\alpha = \frac{49}{43}, \beta = -\frac{2}{43}$$

por lo que la proyección pedida es

$$u = \frac{49}{43}(1,2,0) - \frac{2}{43}(0,-4,1)$$

– –

4. **Resolver DOS de los TRES apartados siguientes :**

4.a **Cierta fábrica de tejidos requiere fabricar dos tejidos de calidades diferentes T_1 y T_2. Se dispone de 500 kg de hilo A, 300 kg de hilo B y 108 kg de hilo C. Para obtener un metro de T_1 diariamente se necesitan 125 gr de A, 150 gr de B y 72 gr de C; y para producir un metro de T_2 diariamente se necesitan 200 gr de A, 100 gr de B y 27 gr de C. El tejido T_1 se vende a 5000€ el metro, mientras que el T_2 se vende a 4.000€ el metro. Si queremos obtener el máximo beneficio, ¿cuántos metros de cada tejido se deben fabricar? ¿Qué beneficio se obtendría en dicho caso?**

4.b **Calcular el límite:**

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right)$$

4.b **Encontrar un valor aproximado para** $\sin(40^{\circ})$ **usando una adecuado polinomio de Taylor de grado** 3**. Estimar el error cometido.**

SOLUCIÓN:

(4.a) Según el enunciado tenemos:

- Tejido T_1 : Sea x en número de metros a fabricar diariamente, los cuales producirán un beneficio de $5000x$.

- Tejido T_2 : Sea y en número de metros a fabricar diariamente, los cuales producirán un beneficio de $4000y$.

Como de hilos A, B y C disponemos de un máximo diario de 500kg, 300 kg y 108 kg, respectivamente, pero para fabricar el tejido T_1 se necesitan 125 gr. de A, 150 gr. de B y 72 gr. de C, mientras que para el T_2 se necesitan 200 gr. de A, 100 gr. de B y 27 gr. de C, resultará el siguiente problema de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = 5000x + 4000y$$
$$\text{sujeto a}$$
$$0.125x + 0.200y \leq 500$$
$$0.150x + 0.100y \leq 300$$
$$0.072x + 0.027y \leq 108$$
$$x,\ y \geq 0$$

Solo hemos de dibujar esta región factible y evaluar z en los puntos extremos de la misma.

(4.b) Se trata de una indeterminación de la forma $\infty \cdot 0$, por lo que para aplicar L'Hôpital lo pondremos en la forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x}} = L'Hôpital = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

(4.c) Tenemos que 40º $= \frac{2\pi}{9}$, siendo además el polinomio de McLaurin de grado 3 el dado por

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + resto$$

Por lo tanto,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \approx \frac{2\pi}{9} - \frac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)^3}{3!} \approx 0.64142$$

donde el error viene dado por

$$resto = \left|\frac{f^{IV}(c)}{4!}x^4\right| = \left|\frac{\sin(c)}{4!}\left(\frac{2\pi}{9}\right)^4\right| < \frac{1}{4!}\left(\frac{2\pi}{9}\right)^4 \approx 9.8978 \times 10^{-3}$$

---

5. **Hallar los extremos absolutos de**

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2$$

en la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 3\}$$

SOLUCIÓN: Calcularemos en primer lugar los puntos críticos de f en el interior de D (que es el círculo $(x-1)^2 + y^2 = 4$):

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x,y) = A(0,0) \in int(D)$$

Y ahora obtenemos los puntos críticos en su frontera, para lo que aplicamos multiplicadores de Lagrange: Sea por tanto

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 3y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 3)$$

de donde

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + \lambda x - \lambda = 0 \\ 2y(3+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 3 \end{array}\right.$$

De la 2ª ec. resulta que $y = 0$, o $\lambda = -3$. Si tomamos $y = 0$, de la última ec. se obtiene $x = 3, -1$, por lo que tenemos los puntos críticos $B(3,0)$ y $C(-1,0)$; si $\lambda = -3$, sustituyendo en la 1ª ec. resulta que $x = -\frac{3}{2}$, y sustituyendo en la 3ª ec. se llega a que no existe valor real para y; por tanto no tenemos puntos críticos en este caso.

Evaluamos entonces f en los 3 puntos obtenidos, y como tenemos que $f(A) = 0$, $f(B) = 9$ y $f(C) = 1$, resultará que el mínimo absoluto se alcanza en A, mientras que el máximo absoluto está en B.

---

6. **Calcular:**

6.a **La integral irracional**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6+5x-x^2}}$$

(Nota: completar cuadrados)

6.b **La integral doble**

$$\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy$$

siendo

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 16,\ x \ge y,\ x-6 \le y,\ x \ge 0,\ y \ge 1\right\}$$

SOLUCIÓN:

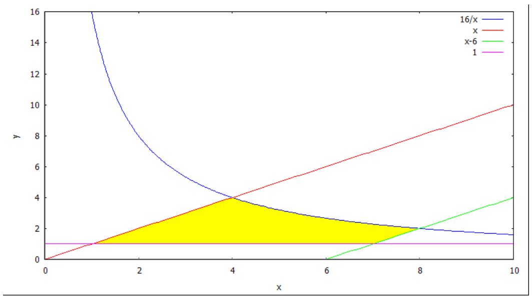
(6.a) Si completamos cuadrados en el denominador, tendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6+5x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{5}{2}\right)^2}} = \frac{2}{7}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}\right)^2}}$$

por lo que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6+5x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}\right) + cte$$

(6.b) La representación gráfica de D viene dada por la sección marcada en el gráfico siguiente



siendo los puntos de intersección $(1,1)$, $(4,4)$, $(7,1)$, $(8,2)$, de manera que se obtienen los siguientes intevalos de variablidad de las variables

$$\text{Si } 1 \le x \le 4 \Rightarrow 1 \le y \le x$$

$$\text{Si } 4 \le x \le 7 \Rightarrow 1 \le y \le \frac{16}{x}$$

$$\text{Si } 7 \le x \le 8 \Rightarrow x-6 \le y \le \frac{16}{x}$$

Por tanto

$$\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy = \int_1^4 dx \int_1^x \frac{x}{y}\,dy + \int_4^7 dx \int_1^{16/x} \frac{x}{y}\,dy + \int_7^8 dx \int_{x-6}^{16/x} \frac{x}{y}\,dy =$$

$$= \int_1^4 (x\ln x)dx + \int_4^7 (x(\ln 16 - \ln x))dx + \int_7^8 (x(\ln 16 - \ln x - \ln(x-6)))dx =$$

$$= 16\ln 4 - 14\ln 2 - 32\ln 8 + 24\ln 16 + 15$$

– –

7. **Probar que el sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} x^2y + \sin(xyz) + z^2 = 1 \\ e^{yz} + xz = 1 \end{cases}$$

define a las variables $y,\ z$ **como funciones implícitas de** x **en las proximidades del punto** $(1,1,0)$**. Calcular las derivadas con respecto a** x **de dichas funciones en ese punto.**

SOLUCIÓN: Sean $\Psi_1(x,y,z) = x^2y + \sin(xyz) + z^2 - 1 = 0$ y $\Psi_2(x,y,z) = e^{yz} + xz - 1 = 0$. Puesto que se verifica que $\Psi_1(1,1,0) = \Psi_2(1,1,0) = 0$ siendo además

$$\frac{\partial(\Psi_1,\Psi_2)}{\partial(y,z)}(1,1,0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Psi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\Psi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(1,1,0)} = \begin{vmatrix} x^2 + xz\cos(xyz) & xy\cos(xyz) + 2z \\ ze^{yz} & ye^{yz} + x \end{vmatrix}_{(1,1,0)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

es cierto que las variables y,z se pueden poner como funciones de x en el punto $(1,1,0)$.

Para calcular $y'(1)$ y $z'(1)$, derivaremos respecto de x en el sistema

$$\begin{cases} x^2 \cdot y(x) + \sin(x \cdot y(x) \cdot z(x)) + z^2(x) = 1 \\ e^{y(x)\cdot z(x)} + x \cdot z(x) = 1 \end{cases}$$

con lo que se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2xy + x^2y' + (yz + xy'z + xyz')\cos(x \cdot y(x) \cdot z(x)) + 2zz' = 0 \\ e^{yz}(y'z + yz') + z + xz' = 0 \end{cases}$$

y si particularizamos el mismo en el punto $(1,1,0)$:

$$\begin{cases} 2 + y'(1) + z'(1) = 0 \\ z'(1) + z'(1) = 0 \end{cases}$$

de donde $z'(1) = 0$ y $y'(1) = -2$.

---

8. **Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales**

$$a) \qquad (x^4\log(x) - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

$$b) \qquad 3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$$

$$c) \qquad y'' + 4y' + 5y = e^{-x} + 15x$$

SOLUCIÓN:

(8.a) Si hacemos $M(x,y) = x^4\log(x) - 2xy^3,$ y $N(x,y) = 3x^2y^2$, se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6xy^2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

por lo que la ecuación no es exacta; sin embargo, al ser

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6xy^2 - 6xy^2}{3x^2y^2} = \frac{-4}{x}$$

la edo admite un factor integrante de la forma

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{-4}{x} dx\right) = \frac{1}{x^4}$$

Podemos comprobar entonces que la edo

$$\frac{1}{x^4}(x^4 \log(x) - 2xy^3)dx + \frac{1}{x^4} 3x^2y^2 dy = 0$$

es exacta, por lo que procederemos a resolver la misma, y que simplificada es

$$\left(\log(x) - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \frac{3y^2}{x^2}dy = 0$$

Al ser $\frac{\partial f}{\partial x} = M = \log(x) - \frac{2y^3}{x^3}$, tendremos que

$$f(x,y) = \int\left(\log(x) - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx = x\log x - x + \frac{y^3}{x^2} + g(y)$$

y para hallar $g(y)$ aplicamos que $\frac{\partial f}{\partial y} = N = \frac{3y^2}{x^2}$, por lo que derivando la expresión anterior e igualando a este segundo miembro, tendremos

$$\frac{3y^2}{x^2} + g'(y) = \frac{3y^2}{x^2}$$

por lo que $g'(y) = 0,$ y $g(y) = cte$. Por tanto, la solución de la edo viene dada por

$$f(x,y) = x\log x - x + \frac{y^3}{x^2} + cte = cte$$

es decir

$$x\log x - x + \frac{y^3}{x^2} = cte$$

(8.b) La edo puede ponerse en la forma

$$\left(2y - \frac{x^3}{y^2}\right)dx + 3xdy = 0$$

y de nuevo es una edo homogénea. Actuando como en el ejemplo anterior, resulta ser

$$\left(5vx - \frac{x}{v^2}\right)dx + 3x^2dv = 0$$

y separando variables, resulta

$$\frac{-1}{3x}dx = \int \frac{v^2}{5v^3 - 1}dv$$

e integrando

$$-\frac{1}{3}\ln x = \frac{1}{15}\ln\left(v^3 - \frac{1}{5}\right) + cte$$

por lo que la solución de la edo dada será

$$-\frac{1}{3}\ln x = \frac{1}{15}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{1}{5}\right) + cte$$

(8.c) En este caso se trata de una edo lineal de 2º orden, de coeficientes constantes y no homogénea. Si hallamos en primer lugar la solución general de la edo homogénea, al ser las raíces de $r^2 + 4r + 5 = 0, -2 \pm i$, tendremos que

$$y_{GH} = e^{-2x}(C_1\cos(1y) + C_2\sin(1y))$$

Para hallar la solución particular de la edo no homogénea, al ser $f(x) = e^{-x} + 15x$, tomaremos inicialmente

$$y_{PNH} = Ae^{-x} + Bx + C$$

Si sustituimos en la edo inicial, obtenemos

$$2Ae^{-x} + 5Bx + 4B + 5C = e^{-x} + 15x$$

de donde identificando coeficientes,

$$2A = 1; \qquad 5B = 15; \qquad 5C = 0$$

por lo que $A = \frac{1}{2}$, $B = 3$ y $C = 0$. Por tanto, la solución general de la edo dada es

$$y_{GNH} = e^{-2x}(C_1 \cos(y) + C_2 \sin(y)) + \frac{1}{2}e^{-x} + 3x$$