Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A
1er Parcial. Curso 2012/2013 (25/01/2013)
ENUNCIADO Y RESUELTO

1. **Sea** $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ **una aplicación lineal que verifica:** $f(0,0,-1)=(10,-5,-3)$ y $f(\mathbf{s})=3\cdot\mathbf{s}$ **para todo** s **de** S, **siendo**

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$$

Calcular:

1.a **La matriz de** f **respecto de las bases canónicas.**

1.b **La dimensión y las ecuaciones del núcleo y de la imagen de** f **y estudiar la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.**

1.c **La matriz de** f **respecto de las bases canónica en el conjunto inicial y** B' **en el final, siendo**

$$B'=\{(1,-2,1),(0,2,-3),(1,0,2)\}$$

Solución:

(1.a) Representaremos por A a la matriz buscada, que inicialmente supondremos que viene dada por

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$$

y vamos a calcular todos estos coeficientes usando las condiciones que sabemos que verifica f:

- Como $f(0,0,-1)=(10,-5,-3)$, esto significa que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-5\\-3\end{pmatrix}$$

de donde $c_1=-10$, $c_2=5$ y $c_3=3$.

- Como sabemos como son las imágenes de los vectores de S (nos dice el enunciado que $f(\mathbf{s})=3\cdot\mathbf{s}$), y se tiene que

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}=\{(x,y,-x-y)\}=<(1,0,-1),(0,1,-1)>$$

tendremos que $f(1,0,-1)=3(1,0,-1)$ y $f(0,1,-1)=3(0,1,-1)$, o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -10\\ a_2 & b_2 & 5\\ a_3 & b_3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -10\\ a_2 & b_2 & 5\\ a_3 & b_3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

de donde $a_1=-7$, $a_2=5$ y $a_3=0$; y $b_1=-10$, $b_2=8$ y $b_3=0$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -10 & -10 \\ 5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1.b) Sabemos que

$$\mathrm{Im}(f) =< (-7,5,0),(-10,8,0),(-10,5,3) >$$

y como estos vectores son linealmente independientes (el determinante de su matriz es claramente no nulo), será $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, por lo que f será suprayectiva. Además se tendrá que verificar entonces que $\dim \ker(f) = 0$, por lo que sin calcularlo sabemos que f es inyectiva y que $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$.

(1c.) Aplicamos el esquema tradicional

$$\underset{C}{R^3} \xrightarrow{f} \underset{C}{R^3} \quad \to \underset{B'}{R^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_{C,B'}(f) = M_{C,B'} \times M_C(f)$$

es decir

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & -10 & -10 \\ 5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =\ldots= \begin{pmatrix} -\frac{43}{8} & -8 & -\frac{61}{8} \\ -\frac{23}{8} & -4 & -\frac{41}{8} \\ -\frac{13}{8} & -2 & -\frac{19}{8} \end{pmatrix}$$

_ _

2. **De la matriz** A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$$

se sabe que $\lambda = 1$ **es uno de sus valores propios, siendo** $(1,1,1)$ **su vector propio asociado. Se pide:**

2.a **Hallar** $a,\ b$ **y** c**.**

2.b **Hallar sus valores y vectores propios.**

2.c **Razonar si** A **es diagonalizable?. En caso afirmativo, hallar la matriz diagonal y las matrices de cambio de base.**

Solución:

(2.a) Como $(1,1,1)$ es un vector propio de valor propio $\lambda = 1,$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde $a = -2,\ b = -2$ y $c = -3$.

(2.b) Pasamos entonces a calcular los valores y vectores propios de A :
En primer lugar calculamos el polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

lo que equivale a

$$\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 + 1 = 0$$

que tiene por raíces

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -1 \text{ (doble)}$$

- Del subespacio propio S_{λ_1} asociado a $\lambda_1 = 1$ sabemos, por el enunciado, que
$$S_{\lambda_1} =< (1,1,1) >$$
- Calculemos el subespacio propio S_{λ_2} asociado a $\lambda_2 = -1$: Hemos de resolver
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de donde resultan 3 ecuaciones iguales

$$x + y - z = 0$$

por lo que $S_{\lambda_2} =< (x,y,x+y) >=< (1,0,1),(0,1,1) >$.

(2.c) Por lo anterior sabemos que A es diagonalizable, por lo que existe P y D tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– –

3. **En $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación bilineal definida por**
$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = xx' + 2yy' + zz'$$

Con esta definición, se pide:

3.a **Probar que esta aplicación define un producto escalar.**

3.b **Hallar una base ortonormal de los subespacios** U **y** W**, siendo**
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y-z = 0,\ 2x - z = 0\right\}$$
$$W =< (1,2,-1),(0,1,1) >$$

3.c **Hallar una base del subespacio ortogonal a cada uno de ellos**.

3.d **Determinar la proyección ortogonal del vector** $(2,3,-2)$ **sobre** U.

Solución:

(3.a) Hemos de ver que se verifican las 5 propiedades de la definición de producto escalar:

$$< \vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}} > = < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > + < \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}} >, \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in V.$$
$$< \alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > = \alpha < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >, \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$
$$< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > = < \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{u}} >, \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in V.$$
$$< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} > \geq 0, \forall \vec{\mathbf{u}} \in V.$$
$$< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} > = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0}.$$

Veamos como demostrar alguna de ellas (el resto se hace de forma análoga):

- $< \vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}} > = < \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} > + < \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{v}} >$: En nuestra terminología, se trata de probar que
$$((x,y,z) + (x',y',z')) \cdot (x'',y'',z'') = (x,y,z) \cdot (x'',y'',z'') + (x',y',z') \cdot (x'',y'',z'')$$
(notemos que al producto escalar lo representamos indistintamente por $(x,y,z) \cdot (x',y',z')$ o por $< (x,y,z),(x',y',z') >$. Pero esta propiedad es inmediata, ya que el término de la izda de la anterior igualdad será
$$((x,y,z) + (x',y',z')) \cdot (x'',y'',z'') = (x+x', y+y', z+z') \cdot (x'',y'',z'') =$$
$$= (x+x')x'' + 2(y+y')y'' + (z+z')z''$$
mientras que el término de la derecha será
$$(x,y,z) \cdot (x'',y'',z'') + (x',y',z') \cdot (x'',y'',z'') = xx'' + 2yy'' + zz'' + x'x'' + 2y'y'' + z'z''$$
y evidentemente ambos resultados coinciden.
- Por ejemplo, si queremos probar la última $< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}} > = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, tendremos que ver que
$$(x,y,z) \cdot (x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$
pero esto es inmediato, ya que el miembro de la izda es
$$(x,y,z) \cdot (x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$$
y la única posibilidad de que esta suma de términos positivos sea 0 es que $(x,y,z) = (0,0,0)$).

(3.b) Hallaremos en primer lugar una base para U y otra para W:

Resolviendo el sistema que aparece en U tenemos que $z = 2x$, $y = x$, por lo que
$$U = \{(x,x,2x)\} = < (1,1,2) >$$
mientras que para W se tiene que
$$W = < (1,2,-1),(0,1,1) >$$
Ahora hemos de transformar estas bases en otras que sean ortonormales, para lo que aplicaremos el método de G-S):

Una base ortonormal para U es inmediata, ya que al tener U un único vector, sólo hemos de dividir por su módulo, de manera que al ser
$$\|(1,1,2)\| = \sqrt{(1,1,2) \cdot (1,1,2)} = \sqrt{7}$$
donde se ha tenido en cuenta la definición que nos dan de producto escalar para calcular el módulo (ojo: no hay que usar el producto escalar canónico, sino el producto escalar que nos da el enunciado; y ésto hay que hacerlo en todo el ejercicio)
$$U = \frac{1}{\sqrt{7}} < (1,1,2) >$$
es base ortonormal para U.

Para W:
$$u_1 = e_1 = (1,2,-1)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \bullet e_2}{u_1 \bullet u_1} u_1 = (0,1,1) - \frac{(1,2,-1) \bullet (0,1,1)}{(1,2,-1) \bullet (1,2,-1)} (1,2,-1) =$$
$$= (0,1,1) - \frac{3}{10}(1,2,-1) = \left(-\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{13}{10}\right)$$

Por tanto, la base ortonormal para W será la dada por $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}\right\}$, donde

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1 \bullet u_1} = \sqrt{10}$$
$$\|u_2\| = \sqrt{u_2 \bullet u_2} = \frac{\sqrt{210}}{10}$$

donde de nuevo estos productos escalares se han obtenido usando el producto escalar dado en el enunciado.

(3.c) En este caso nos piden bases para $U^\perp$ y para $W^\perp$:

- Si $(x,y,z) \in U^\perp$, ha de ser
$$(x,y,z) \bullet (1,1,2) = 0 \Rightarrow x + 2y + 2z = 0$$
por lo que la base del subespacio ortogonal será
$$U^\perp = \{(-2y - 2z, y, z)\} =< (-2,1,0), (-2,0,1) >$$
- Si $(x,y,z) \in W^\perp$, ha de ser
$$\left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \bullet (1,2,-1) = 0 \\ (x,y,z) \bullet (0,1,1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 4y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -6y \\ z = -2y \end{array} \right.$$
por lo que
$$W^\perp =< (-6y, y, -2y) >=< (-6,1,-2) >$$

(3.b) Se trata de poner $(2,3,-2) = u + v$, donde $u \in U$ y $v \in U^\perp$, siendo el valor del vector u la proyección pedida. Al ser $u \in U =< (1,1,2) >$ y $v \in U^\perp =< (-2,1,0), (-2,0,1) >$, se tiene
$$(2,3,-2) = \alpha(1,1,2) + \beta(-2,1,0) + \gamma(-2,0,1)$$
por lo que para hallar α multiplicaremos escalarmente (usando el producto escalar definido en el enunciado) por el vector de U :
$$(2,3,-2) \bullet (1,1,2) = \alpha(1,1,2) \bullet (1,1,2) + \beta(-2,1,0) \bullet (1,1,2) + \gamma(-2,0,1) \bullet (1,1,2)$$
de donde
$$4 = 7\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4}{7}$$
por lo que la proyección pedida es
$$u = \alpha(1,1,2) = \frac{4}{7}(1,1,2)$$

– –

4. **Resolver TRES de los CUATRO apartados siguientes:**

4.a **Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10%, y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las del tipo A, y como mínimo 60.000 euros en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?**

4.b **Calcular el límite:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin(x)-x)}}$$

4.b **Obtener un polinomio que aproxime la función** $f(x) = Sh(x)$ **en el intervalo** $[-1,1]$ **con error menor que** $0,001$**.**

4.c **¿Para qué valores de** x **podemos asegurar que es válida la aproximación**

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

con error menor que $0,001$**?**

Solución:

(4.a) Sea x el total invertido en acciones tipo A (x sería el número de acciones compradas de A multiplicado por su precio; pero como nos piden la distribución total de la inversión -es decir, euros que hemos gastado en cada tipo de acciones- no es preciso distinguir entre el número de acciones que se han comprado y el importe de cada una) y sea y el total invertido en B. Por tanto la función objetivo será

$$f(x,y) = 0.1x+0.08y$$

que nos indica el interés anual que obtendremos habiendo invertido x en acciones A e y en acciones B.

La región factible viene dada por las restricciones

$$\begin{cases} x+y \leq 210.000 \\ x \leq 130.000 \\ y \geq 60.000 \\ x \leq 2y \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si dibujamos esta region factible, obtenemos una región acotada con 5 vértices, que vienen dados por

$$A(120.000, 60.000),\ B(130.000, 80.000),\ C(0, 210.000),\ D(0, 60.000),\ E(130.000, 65.000)$$

y sustituyendo estos valores en f, resulta que el máximo valor se encuentra en el punto $B(130.000, 80.000)$, siendo el beneficio alcanzado de 19.400 euros.

(4.b) Este límite es de la forma 1^∞ por lo que lo resolveremos usando $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)(1-f(x))}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin(x)-x)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sin(x)-x)}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}-1\right)}$$

Si resolvemos aparte el límite que aparece en el exponente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sin(x)-x)}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+\frac{x^2}{2}-1}{x(\sin(x)-x)}$$

y si usamos los desarrollos de McLaurin de las correspondientes funciones, tendremos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+\frac{x^2}{2}-1}{x(\sin(x)-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]+\frac{x^2}{2}-1}{x\left(\left[x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right]-x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}-\ldots}{-\frac{x^4}{3!}+\ldots} = -\frac{3!}{4!} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin(x)-x)}} = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

(Nota: También podríamos haber resuelto el límite del exponente aplicando dos veces la regla de L´Hopital).

(4.c) Sabemos que

$$Sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Probaremos inicialmente aproximando por un polinomio de grado 5, y veremos si el resto es menor que $0,001$:

Si tomamos

$$Sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + Resto$$

tenemos que

$$Resto = \left| \frac{f^{VI}(c)}{6!} x^6 \right|$$

siendo c un valor comprendido en $(0, x)$ y x comprendido en $[-1, 1]$. Como $f^{VI}(x) = Sh(x)$, tendremos que

$$Resto = \left| \frac{f^{VI}(c)}{6!} x^6 \right| = \left| \frac{Sh(c)}{6!} x^6 \right| < \left| \frac{Sh(1)}{6!} 1^6 \right| = \frac{\frac{e^1 - e^{-1}}{2}}{6!} = \frac{\frac{e^2-1}{2e}}{6!} = \frac{e^2 - 1}{6! \cdot 2e}$$

ya que $Sh(x)$ es una función creciente y además $Sh(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2}$. Teniendo en cuenta que $2 < e < 3$, tendremos que

$$Resto < \frac{e^2 - 1}{6! \cdot 2e} < \frac{3^2 - 1}{6! \cdot 2 \cdot 2} = 0,00555$$

y como esta cantidad no es menor que $0,001$, habremos de tomar más términos para aproximar $Sh(x)$: Si tomamos

$$Sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + Resto$$

tenemos que

$$Resto = \left| \frac{f^{VIII}(c)}{8!} x^8 \right|$$

Por el mismo razonamiento anterior, tendremos

$$Resto = \left| \frac{f^{VIII}(c)}{8!} x^8 \right| = \left| \frac{Sh(c)}{8!} x^8 \right| < \left| \frac{Sh(1)}{8!} 1^8 \right| = \frac{e^2 - 1}{8! \cdot 2e} < \frac{3^2 - 1}{8! \cdot 2 \cdot 2} < 0,001$$

Por lo tanto, es suficiente con tomar el polinomio de McLaurin de grado 7.

(4.d) Sabemos que

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + Resto$$

donde

$$Resto = \left| \frac{f^{IV}(c)}{4!} x^4 \right|$$

siendo c un valor comprendido en $(0, x)$. Por tanto hemos de estudiar para qué valores de x se tiene que este Resto es menor que $0,001$.

Como si $f(x) = \log(1 + x)$, se tiene que

$$f^{IV}(x) = -\frac{6}{(1 + x)^4}$$

entonces

$$Resto = \left| \frac{f^{IV}(c)}{4!} x^4 \right| = \left| \frac{-\frac{6}{(1+c)^4}}{4!} x^4 \right| = \frac{6}{4!(1+c)^4} |x^4|$$

y como c está en $(0, x)$

$$Resto = \frac{6}{4!(1+c)^4} |x^4| < \frac{6}{4!(1+0)^4} |x^4| = \frac{|x^4|}{4}$$

y como queremos que el error cometido sea menor que $0,001$, esto será posible si

$$\frac{|x^4|}{4} < 0,001$$

o lo que es lo mismo, si

$$|x^4| < 0,004 \Leftrightarrow |x| < \sqrt[4]{0,004} = 0.2515 \Leftrightarrow -0.2515 < x < 0.2515$$

– –