Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A
Examen Final Septiembre. Curso 2011/2012
01/09/2012
(ENUNCIADO Y RESUELTO)

1. $\left[\mathbf{1,5\ puntos}\right]$ **Sea** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **un endomorfismo dado por**

$$f(x,y,z) = \left(x-y+z,\ -2x+y+z,\ x-y+2z\right)$$

1.a **Calcular la matriz de** f **respecto de las bases canónicas.**
1.b **Calcular bases para** $\ker(f)$ **e** $\mathrm{Im}(f)$**. Calcular el rango de** f **y clasificar** f**.**
1.c **Calcular la matriz de** f **cuando se considera en el conjunto inicial y en el final la base** B **dada por**

$$B = \{(-1,1,1),(0,-2,1),(1,2,-1)\}$$

SOLUCIÓN:
(1.a) Trivialmente se verifica

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1.b) Sabemos que

$$\mathrm{Im}(f) =< (1,-2,1),(-1,1,-1),(1,1,2) >$$

y puesto que estos 3 vectores son independientes, tendremos que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$, por lo que f será una aplicación suprayectiva. Además sabemos que $rango(f) = 3$, y que también f es inyectiva (ya que la dimensión de $\ker(f)$ será 0). Por tanto no es preciso calcular $\ker(f)$, ya que

$$\ker(f) = \{(0,0,0)\}$$

(1.c) Se trata de aplicar el siguiente diagrama

$$\underset{B}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{B}{\mathbb{R}^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_{B,B}(f) = M_{C,B}(Id) \times M_C(f) \times M_{B,C}(Id)$$

es decir

$$M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & 7 & -5 \\ \frac{1}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

_ _

2. $\left[\mathbf{1,5\ puntos} \right]$ **¿Qué debe verificar el parámetro** $a \in R$ **para que la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable? Cuando lo sea, hallar su forma diagonal, una matriz de paso P**, y** A^n **para cualquier número natural** n**.**

SOLUCIÓN: Calcularemos los valores propios de la matriz:

$$|A - \lambda\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 - 5\lambda - \lambda^3 + 2 = 0$$

de donde resulta $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 2.$ Si calculamos los subespacios propios respectivos:

- V_{λ_1} :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

resulta ser: Si $\mathbf{a} \neq 0$, entonces

$$V_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \mid y+z = 0;\ x+z = 0\} = \{(-z,-z,z)\} =< (1,1,-1) >$$

pero si $\mathbf{a} = 0$, entonces

$$V_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \mid x+z = 0\} = \{(-z,y,z)\} =< (1,0,-1),(0,1,0) >$$

- V_{λ_2} :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

resulta ser (independientemente que **a** sea o no nulo)

$$V_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \mid y+z = 0;\ x = 0\} = \{(0,-z,z)\} =< (0,1,-1) >$$

De esta forma resulta que A será diagonalizable cuando $\mathbf{a} = 0$ (ya que solo en este caso la dimensión de V_{λ_1} es 2, y coincide con la multiplicidad de su valor propio). Además sabemos que, en este caso,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } D = diag(1,1,2)$$

y se verifica que

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2^n+1 & 1 & -2^n+1 \\ 2^n-1 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

– –

3. $\left[\mathbf{1,5\ puntos}\right]$ **En el espacio vectorial R^3 se consideran los subespacios**

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y - z = 0\} \quad \text{y} \quad T =< (1,-2,1) >$$

3.a **Estudiar si $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$. Indicar, si es posible, una base para $S \cap T$.**

3.b **Descomponer el vector $v = (1,2,3)$ como suma de un vector de S y otro de T.**

SOLUCIÓN:

(3.a) Sabemos que

$$S = \{(x,y,2x+y)\} =< (1,0,2),(0,1,1) > \quad \text{y} \quad T =< (1,-2,1) >$$

por lo que la suma será directa siempre que $S \cap T$ sea $(0,0,0)$ (ya que $\dim S = 2$ y $\dim T = 1$). Entonces, si $(x,y,z) \in S \cap T$, tendrá que ser

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,1) \text{ y } (x,y,z) = \gamma(1,-2,1)$$

o lo que es lo mismo

$$\alpha(1,0,2) + \beta(0,1,1) = \gamma(1,-2,1)$$

Este sistema homogéneo tiene solución única (su determinante es no nulo) por lo que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, y $(x,y,z) = (0,0,0)$. Por tanto, es cierto que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

(3.b) Se trata de poner $v = s + t$, siendo el primero un vector de S y el segundo un vector de T. Por tanto, hemos de resolver

$$v = (1,2,3) = \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,-2,1)$$

Realizando los cálculos oportunos, resulta ser $\alpha = 2,\ \beta = 0,\ \gamma = -1$, por lo que

$$v = (1,2,3) = (2,0,4) + (-1,2,-1)$$

siendo el primero un vector de S y el segundo un vector de T.

– –

4. $\left[\mathbf{1\ punto}\right]$ Calcular **dos de los tres** siguientes apartados:

4.a **El límite siguiente, usando infinitésimos equivalentes**

$$\lim_{x\to-3} \frac{(\cos(x+3)-1)\arctan(x+3)}{\log(x+4)(5^{x+3}-1)^2}$$

4.b **El valor de $\sin(0,3)$ con error menor que una milésima.**

4.c **El valor de la integral**

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$$

SOLUCIÓN:

(4.a) Es el típico límite que se resuelve mediante infinitésimos equivalentes, ya que se tiene (y siempre que $x \to -3$)

$$\cos(x+3)-1 \sim -\frac{(x+3)^2}{2}; \qquad \arctan(x+3) \sim (x+3);$$
$$\log(x+4) \sim (x+3); \qquad 5^{x+3}-1 \sim (x+3)$$

NOTA: También podríamos haber realizado primero el cambio de variable $y = (x+3)$, con lo que el límite se hubiese transformado en

$$\lim_{y\to 0} \frac{(\cos(y)-1)\arctan(y)}{\log(1+y)(5^y-1)^2}$$

y posiblemente en este caso se ven más claras las equivalencias a aplicar.

De una u otra forma, resulta ser

$$\lim_{x\to -3} \frac{(\cos(x+3)-1)\arctan(x+3)}{\log(x+4)(5^{x+3}-1)^2} = \lim_{x\to -3} \frac{-\frac{(x+3)^2}{2}(x+3)}{(x+3)(x+3)^2} = -\frac{1}{2}$$

(4.b) Usaremos un desarrollo de McLaurin de grado 3 para $f(x) = \sin x$, y evaluaremos su resto en $x = 0.3$ para ver si es menor que una milésima:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + Resto, \qquad \text{con } Resto = \left|\frac{f^{IV}(c)}{4!}\right| x^4$$

y puesto que en $x = 0.3$ se tiene que

$$Resto = \left|\frac{f^{IV}(c)}{4!}\right|(0.3)^4 < \left|\frac{1}{4!}\right|(0.3)^4 = 3.375\times 10^{-4} < 10^{-3}$$

es suficiente con tomar

$$\sin(0.3) \simeq 0.3 - \frac{(0.3)^3}{6} = 0.2955$$

(4.c) La integral podemos descomponerla

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = \int \frac{2x}{\sqrt{4-9x^2}}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

de forma que la primera es inmediata y la segunda es del tipo arcsin. Resolviendo ambas por separado

$$\int \frac{2x}{\sqrt{4-9x^2}}dx = -\frac{1}{9}\int \frac{-18x}{\sqrt{4-9x^2}}dx = -\frac{1}{9}2\sqrt{4-9x^2}$$

y

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9}{4}x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right)$$

Por tanto

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-9x^2}}dx = -\frac{2}{9}\sqrt{4-9x^2} - \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right) + Cte$$

– –

5. **$\left[1{,}5 \text{ puntos}\right]$ Encontrar los extremos absolutos de la función**

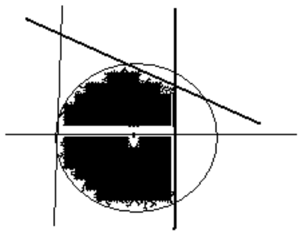
$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$$

sobre el conjunto compacto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ (x-2)^2 + y^2 \le 4,\ x \le 3,\ 2y \le 6 - x\right\}$$

Justifica lo realizado.

SOLUCIÓN: El conjunto K corresponde a la porción sombreada de la figura, siendo los 3 puntos de intersección los dados por $A\left(3,-\sqrt{3}\right)$ (es la intersección de la circunferencia con la recta $x = 3$), $B(2,2)$ (es la intersección de la circunferencia con la recta $2y = 6 - x$) y $C\left(3, \frac{3}{2}\right)$ (es la intersección de las dos rectas):



Calcularemos primero los puntos críticos que están en el interior de la región: De

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

resulta ser $D(1,0)$, que es interior a la región.

Calcularemos ahora los puntos críticos en el borde de la figura, y que está formado por 3 curvas:

- En la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 \le 4$: Aplicaremos Multiplicadores de Lagrange, por lo que hemos de evaluar los puntos críticos de la función
$$F(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda\left((x-2)^2 + y^2 - 4\right)$$
Resolviendo el correspondiente sistema, resulta que ha de ser $y = 0$ (ya que si $y \neq 0$ el sistema no tiene solución), por lo que el único punto crítico en la región es $E(0,0)$.
- En la recta $x = 3$: La función se transforma en
$$f(3,y) = (3-1)^2 + y^2 = 4 + y^2$$
cuyo único punto crítico es $F(3,0)$.
- En la recta $2y = 6 - x$: La función se transforma en
$$f(6-2y,y) = (6-2y-1)^2 + y^2 = y^2 + (5-2y)^2$$
cuyo único punto crítico es $G(2,2)$.

Para finalizar, solo hemos de evaluar f en los 4 puntos obtenidos y en los 3 vértices. Como $f(A) = 7$, $f(B) = 5$, $f(C) = \frac{25}{4}$, $f(D) = 0$, $f(E) = 1$, $f(F) = 4$ y $f(G) = 5$, entonces el máximo absoluto se alcanza en A y el mínimo absoluto en D.

---

6. $\left[\mathbf{1,5\ puntos}\right]$ **Calcular la siguiente integral**

$$\iint_D x^2 y \cdot dxdy$$

siendo D la corona circular

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 16\right\}$$

SOLUCIÓN: La región D es la corona comprendida entre el círculo de radio 1 y el círculo de radio 4. Calcularemos entonces esta integral doble usando un cambio a coordenadas polares, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, donde $0 < \theta < 2\pi$ y $1 < r < 4$:

$$\iint_D x^2 y \cdot dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 (r\cos\theta)^2 (r\sin\theta) \cdot rdr = \ldots = 0$$

_ _

7. $\left[\mathbf{1,5}\ \textbf{puntos}\right]$ Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \quad \begin{cases} y' + y\tan x = \sin(2x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (b) \quad (3y^2 + 2xy)dy - (2xy + x^2)dx = 0$$

SOLUCIÓN:

(7.a) Se trata de una edo lineal de 1er orden, ya que corresponde al tipo

$$y' + f(x)y = g(x)$$

con $f(x) = \tan x$ y $g(x) = \sin(2x)$. Podemos por tanto aplicar la fórmula que nos da su solución general

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right) = e^{-\int \tan x dx}\left(\int \sin(2x)e^{\int \tan x dx}dx + C\right) = \cos x(C - 2\cos x)$$

Para determinar C usaremos que $y(0) = 1$, por lo que $1 = \cos 0(C - 2\cos 0)$ y $C = 3$.

(7.b) Se trata de una edo homogénea de 1er orden (al ser ambos paréntesis funciones homogéneas de grado 2). Haciendo por tanto el cambio $y = v \cdot x$ (donde sabemos que $dy = xdv + vdx$) tendremos

$$(3v^2x^2 + 2xvx)(xdv + vdx) - (2xvx + x^2)dx = 0$$

o lo que es lo mismo

$$-\frac{dx}{x} = \frac{3v^2 + 2v}{3v^3 + 2v^2 - 2v - 1}dv$$

que es una edo en variables separadas. Integrando ambos miembros obtendremos el resultado.

NOTA: la integral del segundo miembro es un cociente de polinomios, cuyo denominador tiene 3 raíces reales distintas (-1, $\frac{1}{6}\left(1 - \sqrt{13}\right)$ y $\frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{13}\right)$), por lo que dará lugar a 3 logartimos neperianos. Al final la solución de la edo vendrá dada por :

$$-\log x = \frac{1}{3}\ln(v+1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{39}\sqrt{13}\right)\ln\left(v - \frac{1}{6}\left(1 - \sqrt{13}\right)\right) +$$
$$+ \left(\frac{2}{39}\sqrt{13} + \frac{1}{3}\right)\ln\left(v - \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{13}\right)\right) + C$$