Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso.
Grupo A
Examen Final Junio. Curso 2011/2012. 19/06/2012

1. **Sea** $f : R^4 \to R^4$ **un endomorfismo dado por**

$$f(x,y,z,t) = \left(x-y-2z+t,\ x-y-t,\ -2z+2t,\ -2z+2t\right)$$

1.a **Calcular la matriz de** f **respecto de las bases canónicas.**

1.b **Calcular bases para** $Ker(f)$ **e** $\mathrm{Im}(f)$**. Calcular el rango de** f **y clasificar** f**.**

1.c **Calcular** f^2.

1.d **Calcular la matriz de** f **cuando se considera la base canónica en el conjunto inicial y la base** B **en el final, siendo**

$$B = \{(-1,-1,1,0),(0,-2,1,2),(1,2,-1,-1),(1,0,-1,0)\}$$

SOLUCIÓN:

(1.a) Claramente se verifica que

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1.b) Tenemos que

$$Ker(f) = \{(x,y,z,t)\ |\ f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)\}$$

lo que equivale a resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x-y-2z+t = 0 \\ x-y-t = 0 \\ -2z+2t = 0 \\ -2z+2t = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución $x = y+z$, $t = z$. Así

$$Ker(f) = \{(x,y,z,t)\ |\ (x,y,z,t) = (y+z,y,z,z)\} =< (1,1,0,0),(1,0,1,1) >$$

siendo ambos vectores una base para $Ker(f)$.Por tanto sabemos que $\dim(Ker(f)) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$, y como

$$\mathrm{Im}(f) =< \text{columnas de } M_C(f) >=< (1,1,0,0),(1,-1,2,2) >$$

Por tanto, el rango de f será 2, y f no es ni inyectiva ni suprayectiva.

(1.c) La expresión para f^2 (que es lo mismo que $f \circ f$) se puede calcular fácilmente al ser su matriz asociada $(M_C(f))^2$:

$$(M_C(f))^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que $f^2 \equiv 0$.

(1.d) Tendríamos el siguiente esquema para el cambio de base pedido

$$R^4 \xrightarrow{f} R^4 \overset{Id}{--} -> R^4$$

$$C \to C --- > B$$

por lo que sabemos que $M_{C,B}(f) = M_{C,B} \times M_C(f)$, es decir

$$M_{C,B}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

----

2. **Dado** $f : R^3 \to R^3$ **el endomorfismo dado por**

$$f(x,y,z) = \left(2x - y + z,\ x + z,\ x - y + 2z\right)$$

2.a **Probar que** f **es diagonalizable y hallar una base** B **respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal.**

2.b **Calcular** $f^{10}(1,-1,1)$ **y hallar** $(x,y,z) \in R^3$ **tal que** $f^{10}(x,y,z) = (1,-1,1)$.

SOLUCIÓN: La matriz asociada a f es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son (resolvemos el polinomio característico $|A - \lambda \mathbb{I}| = 0$)

$$\lambda_1 = 1 \text{ (doble)},\ \lambda_2 = 2$$

Como la matriz tiene 2 valores propios reales y distintos (uno de ellos doble), para asegurar que es diagonalizable tendremos que calcular los respectivos subespacios vectoriales propios:

- Asociado a λ_1 : Resolvemos el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x - y + 2z = 0$$

por lo que

$$S_{\lambda_1} = \{(y-2z, y, z)\} =< (1,1,0), (-2,0,1) >$$

- Asociado a λ_2 : Resolvemos el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = y = z$$

por lo que

$$S_{\lambda_2} = \{(z,z,z)\} =< (1,1,1) >$$

Por todo lo anterior podemos deducir que A es diagonalizable (ya que las dimensiones de los subespacios propios coinciden con las multiplicidades de los respectivos valores propios) y que la base respecto de la cual la matriz es diagonal está dada por las columnas de la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puede comprobarse que se verifica que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = diag(1,1,2)$$

— —

3. **Calcular dos de los tres siguientes apartados:**

3.a **El límite, expresándolo como una adecuada integral**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{3^2}{n^3+3^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$$

3.b **El valor de** $\log(1,02)$ **mediante un adecuado polinomio de Taylor de grado** 3**, y dar una cota del error.**

3.c **El valor de la integral**

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

SOLUCIÓN:

(3.a) El límite se puede expresar de la siguiente forma

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{3^2}{n^3+3^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3+n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3+i^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2 n}{n^3+i^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i^2 n}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{i^3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^3} = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

integral que es inmediata, siendo su valor (y por tanto el del límite pedido) $\frac{1}{3}\log 2$.

(3.b) Usaremos el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $a = 0$ (es decir, el polinomio de Mclaurin) para la función $f(x) = \log(1+x)$ (también podríamos aplicar el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $a = 1$ para la función $f(x) = \log x$; notemos que tanto en un caso como en el otro, el punto $1,02$ está muy próximo al punto en que desarrollamos la función). Como sabemos que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{Re}sto$$

tendremos que

$$\log(1,02) = \log(1+0,02) = 0,02 - \frac{0,02^2}{2} + \frac{0,02^3}{3} + \mathrm{Re}sto$$

por lo que podemos aproximar

$$\log(1,02) \approx 0.02 - \frac{0.02^2}{2} + \frac{0.02^3}{3} = 0.198$$

y el error viene dado por

$$\mathrm{Re}sto = \left| \frac{f^{IV}(c)}{4!} 0,02^4 \right|$$

siendo $0 < c < 0,02.$ Por tanto

$$\mathrm{Re}sto = \left| \frac{-6}{(1+c)^4 4!} 0,02^4 \right| < \left| \frac{-6}{(1+0)^4 4!} 0,02^4 \right| = \frac{0.02^4}{4} = 4.0 \times 10^{-8}$$

(3.c) Haremos el cambio de variable $t^2 = x+1$. De esta forma, $x = t^2 - 1$ y $dx = 2tdt$. Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{(t^2-1)^2+1}{t} 2tdt = 2\int (t^4 - 2t^2 + 1)dt$$

que ya es inmediata de resolver.

– –

4. **Encontrar los extremos locales de la función implícita $z = z(x,y)$ definida por la ecuación**

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 6z - z^2 = 0$$

SOLUCIÓN: Primeramente hallaremos los puntos críticos de z, para lo cual tendremos que resolver el sistema $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Necesitamos por tanto hallar primero las derivadas parciales de z :

Si derivamos en

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 6z(x,y) - z^2(x,y) = 0$$

respecto de x y después respecto de y, tendremos

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 4 + 6z_x - 2zz_x = 0 \\ 2y - 2 + 6z_x - 2zz_x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_x = \frac{2-x}{3-z} \\ z_y = \frac{1-y}{3-z} \end{array} \right.$$

Por tanto, el único punto crítico (solución del sistema $z_x = z_y = 0$) será $(x,y) = (2,1)$. En las operaciones que siguen, también necesitaremos el valor de z en dicho punto, valor que obtendremos sin más que sustituir en la ecuación inicial los valores de x e y. Si lo hacemos, resultará $z = 5$ o 1.

Para saber si en este punto hay un máximo o un mínimo, precisamos calcular el hessiano en el mismo. Como

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-(3-z)+(2-x)z_x}{(3-z)^2} & \frac{(2-x)z_y}{(3-z)^2} \\ \frac{(2-x)z_y}{(3-z)^2} & \frac{-(3-z)+(1-y)z_y}{(3-z)^2} \end{vmatrix}$$

tendremos que

$$Hf(2,1) = \begin{vmatrix} \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{16}$$

donde hemos sustituido z por 5 o 1 (se obtiene el mismo resultado). Como resulta que $Hf(2,1) > 0$ y $z_{xx}(2,1) < 0$, el punto $(2,1)$ es un máximo para la función z definida implícitamente por la ecuación inicial.

– –

5. **Calcular la siguiente integral**

$$\iiint_v xyz \cdot dxdydz$$

siendo

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

SOLUCIÓN: La integral resulta inmediata si hacemos un cambio a coordenadas esféricas, ya que

$$\iiint_v xyz \cdot dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\sin\phi\cos\theta)(r\sin\phi\sin\theta)(r\cos\phi)r^2\sin\phi \cdot d\phi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^1 r^5 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\cos\phi d\phi = \frac{1}{48}$$

– –

6. **Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:**

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y+x\cos^2(\frac{y}{x})}{x} \\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad (b) \quad y'' - 3y' + 2y = 2x^2$$

SOLUCIÓN:

(6.a) Se trata de una edo homogénea, ya que las funciones que acompañan a dx y dy son homogéneas de grado 1

$$\left(y + x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx - xdy = 0$$

Haciendo por tanto el cambio $y = v \cdot x$ (donde sabemos que $dy = xdv + vdx$) tendremos

$$(vx + x\cos^2(\frac{vx}{x}))dx - x(xdv + vdx) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\cos^2 v}$$

que es una edo en variables separadas. Integrando esta ecuación

$$\log x = \tan v + C$$

es decir

$$\log x = \tan \frac{y}{x} + C$$

Para hallar la constante C usaremos la condición inicial $y(1) = \frac{\pi}{4}$, por lo que

$$\log 1 = \tan \frac{\pi/4}{1} + C$$

Así,

$$C = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

y la solución del PVI viene dada por

$$\log x = \tan \frac{y}{x} + 1$$

(6.b) La solución general de la edo homogénea asociada viene dada por

$$y_{GH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

ya que las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 2, r_2 = 1.$ Para hallar la solución particular de la ec no homogénea, y al ser la parte no homogénea $2x^2$, probaremos con una expresión de la forma

$$y_{PNH} = Ax^2 + Bx + C$$

que si la sustituimos en la ecuación inicial, resulta que $A = 1,\ B = 3$ y $C = 7$, por lo que la solución general de la edo propuesta es

$$y_{GNH} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + x^2 + 3x + 7$$