Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso.
Grupo A
Examen Final Convocatoria Septiembre 2011.

ENUNCIADO Y RESUELTO

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya expresión analítica es

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, x + y)$$

1.a Hallar la matriz de f respecto de la base canónica.

1.b Determinar bases del núcleo y de la imagen de f y estudiar la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.

1.c Hallar la matriz de f respecto de las siguientes bases

$$\begin{aligned} B &= \{(1, 2, 0), (2, -1, 0), (0, 0, 1)\} \\ B' &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\} \end{aligned}$$

Solución.

(1.a) De forma inmediata se tiene que

$$M_{Canonica}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.b) Sabemos que $Im(f)$ está generada por las columnas de la anterior matriz, es decir

$$Im(f) =< (1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 0) >=< (1, 1, 1), (1, -1, 1) >$$

por lo que su dimensión será 2 (así f no puede ser suprayectiva), y también sabemos que la dimensión de $Ker(f)$ tiene que ser 1 (por lo que f no será inyectiva). Para calcular este último sólo hemos de resolver el sistema dado por

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, x + y) = (0, 0, 0)$$

de donde se obtiene que $x = y = 0$. Así,

$$Ker(f) = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\} = \{(0, 0, z)\} =< (0, 0, 1) >$$

(1.c) Consideramos el esquema dado por

$$\underset{B}{R^3} \xrightarrow{Id} \underset{C}{R^3} \xrightarrow{f} \underset{C}{R^3} \xrightarrow{Id} \underset{B'}{R^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_{B,B'}(f) = M_{C,B}(Id) \times M_C(f) \times M_{B',C}(Id)$$

es decir

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

– –

2. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.a Calcular a y b para que el vector $(0, 1, -1)$ sea un vector propio de A.

2.b Para $a = 2$, $b = 3$ demostrar que la matriz A es diagonalizable, hallando una matriz diagonal y una matriz de paso asociadas.

Solución.

(2.a) Un vector $\mathbf{v}$ es un vector propio de una matriz A si verifica $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, siendo λ un escalar. Por tanto, $(0, 1, -1)$ será vector propio si existe un escalar λ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema, se llega a que $a = 1$ y $b = 2$ (siendo $\lambda = 1$).

(2.b) Los valores propios de la matriz A (para $a = 2$, $b = 3$) vienen dados por

$$|A - \lambda \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

que tiene por soluciones $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 3$ (simple). Si hallamos entonces sus subespacios vectoriales asociados:

- V_{λ_1} : De resolver

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  se llega a $2y + z = 0$. Por tanto,

$$V_{\lambda_1} = \{(x, y, z) \mid 2y + z = 0\} = \{(x, y, -2y)\} =< (1, 0, 0), (0, 1, -2) >$$

  y el subespacio vectorial tiene dimensión 2.

- V_{λ_2} : De resolver
$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
se llega a $x = y$, $z = 0$. Por tanto,
$$V_{\lambda_2} = \{(x, y, z) \mid x = y,\ z = 0\} = \{(x, x, 0)\} =< (1, 1, 0) >$$
y el subespacio vectorial tiene dimensión 1.
- De todo lo anterior se tiene que A es diagonalizable y si se toman
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
se verificará que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.

— —

3. Utilizando el desarrollo de Taylor del grado adecuado de la función e^x en el punto $a = 0$ calcular $\sqrt[6]{e}$ con un error inferior a 10^{-4}.

Solución. Consideramos inicialmente un desarrollo de McLaurin de grado 3 para e^x, es decir
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^c}{4!}x^4$$
Así, si aproximamos
$$\sqrt[6]{e} = e^{1/6} \simeq 1 + 1/6 + \frac{(1/6)^2}{2} + \frac{(1/6)^3}{3!}$$
el error cometido vendrá dado por
$$Resto = \frac{e^c}{4!}(1/6)^4 < \frac{2}{4!}(1/6)^4 < 10^{-4}$$
donde se ha utilizado que al ser $0 < c < \frac{1}{6}$ entonces $1 < e^c < 2$. Al ser el resto menor que la cantidad pedida, es suficiente con haber aproximado por un polinomio de McLaurin de grado 3.

— —

4. Calcular las integrales
$$(4.a)\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos^4 x dx \qquad (4.b)\int_{-1}^{0} \frac{3x-4}{x^2-3x+2}dx$$

Solución.

(4.a) Se trata de una integral inmediata, ya que

$$\int_0^\pi \sin x \cdot \cos^4 x dx = \left[-\frac{\cos^5 x}{5}\right]_0^\pi = \frac{2}{5}$$

(4.b) Las raíces del denominador son 2 y 1, por lo que hacemos la descomposición

$$\frac{3x-4}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

Calculando los coeficientes, resulta ser $A = 2, B = 1$. Así

$$\int_{-1}^0 \frac{3x-4}{x^2-3x+2} dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1}\right) dx = ... = \log 2 - 2\log 3$$

– –

5. La ecuación

$$z^3 + xz + y = 0$$

define a z como función de (x, y) en un entorno del punto $(1, -2, 1)$. Hallar la ecuación del plano tangente a $z(x, y)$ en el punto $(1, -2)$.

Solución. Si en la expresión

$$z^3(x, y) + x \cdot z(x, y) + y = 0$$

derivamos respecto de x :

$$3z^2 \cdot z_x + 1 \cdot z + x \cdot z_x + 0 = 0$$

de donde particularizando en el punto $(1, -2)$:

$$3 \cdot 1 \cdot z_x(1, -2) + 1 + 1 \cdot z_x(1, -2) = 0$$

de manera que $z_x(1, -2) = -\frac{1}{4}$. De igual forma, si derivamos parcialmente respecto de y :

$$3z^2 \cdot z_y + x \cdot z_y + 1 = 0$$

de donde particularizando en el punto $(1, -2)$:

$$3 \cdot 1 \cdot z_y(1, -2) + 1 \cdot z_x(1, -2) + 1 = 0$$

de manera que $z_y(1, -2) = -\frac{1}{4}$. Por tanto, la ecuación del plano tangente pedido es

$$z - 1 = -\frac{1}{4}(x-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)(y+2)$$

6. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x^3 - \cos y - xy^2 + (x \sin y - yx^2) \cdot y' = 0$$

Solución. Si se toma $M = x^3 - \cos y - xy^2$, $N = x \sin y - yx^2$, al verificarse que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin y - 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

resulta que se trata de una edo exacta. Para resolverla, como sabemos que existe $f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$, tendremos que

$$f(x,y) = \int M dx + g(y) = \int \left(x^3 - \cos y - xy^2\right) dx + g(y) = \frac{x^4}{4} - x\cos y - \frac{x^2y^2}{2} + g(y)$$

Por tanto, ya tenemos hallada $f(x, y)$ a excepción de $g(y)$.

Como además ha de ser $\frac{\partial f}{\partial y} = N$, tendremos entonces

$$x \sin y - x^2 y + g'(y) = x \sin y - x^2 y$$

de donde $g'(y) = 0$ y $g(y) = K$. Por tanto, la solución general de la edo viene dada por $f(x, y) = Cte$, o lo que es lo mismo

$$\frac{x^4}{4} - x\cos y - \frac{x^2y^2}{2} = C$$

− −

7. Escribir, sin calcular los coeficientes, cómo sería la expresión de una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones lineales con coeficientes constantes:

7.a $-y'' + 4y' = 3 \cdot e^{-4x}$

7.b $-y'' + 4y' = 2 \cdot e^{4x}$

7.c $-y'' + 4y' = 5\cos(5x)$

7.d $-y'' + 4y' = -x^2 + 8$

Solución. Para todos los casos la edo lineal homogénea asociada es $-y'' + 4y' = 0$, cuya ecuación característica viene dada por $-\lambda^2 + 4\lambda = 0$ y sus soluciones son $\lambda = 0$ y $\lambda = 4$. Así, la solución general de la ecuación homogénea viene dada por

$$y_{GH} = c_1 \cdot e^{0x} + c_2 \cdot e^{4x} = c_1 + c_2 \cdot e^{4x}$$

(7.a) Como la parte no homogénea es $3 \cdot e^{-4x}$, tomaremos como solución particular de la no homogénea $y_{PNH} = A \cdot e^{-4x}$ (no hay repetición con los términos de y_{GH}).

(7.b) Como la parte no homogénea es $2 \cdot e^{4x}$, tomaremos como solución particular de la no homogénea $y_{PNH} = A \cdot x \cdot e^{4x}$ (ya que hay repetición con alguno de los términos de y_{GH}).

(7.c) Como la parte no homogénea es $5\cos(5x)$, tomaremos como solución particular de la no homogénea $y_{PNH} = A\cos(5x) + B\sin(5x)$ (no hay repetición con los términos de y_{GH}).

(7.d) Como la parte no homogénea es $-x^2 + 8$, tomaremos como solución particular de la no homogénea $y_{PNH} = (Ax^2 + Bx + C)\cdot x$ (ya que hay repetición con con alguno de los términos de y_{GH}).