Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso.
Grupo A
Examen Final. 14 de junio de 2011

1. **Sea** $f : R^3 \to R^3$ **una aplicación lineal y consideremos la base de** R^3 **dada por** $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, **donde** $e_1 = (-1,0,1)$, $e_2 = (0,1,1)$ **y** $e_3 = (0,-1,0)$. **Supongamos que**

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $x \in R$ **cumple que** $f(e_1 + e_2) = (1,0,2)$. **Se pide**

1.a **Probar que** $x = -1$.

1.b **Calcular la matriz de** f **respecto de la base canónica de** R^3 **y su expresión analítica.**

1.c **Estudiar la inyectividad y suprayectividad de** f, **y calcular bases para su núcleo e imagen.**

(1.a) Se verifica

$$(1,0,2) = f(e_1+e_2) = f(e_1) + f(e_2) = (x \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3) + (0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3) =$$
$$= x \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 = x(-1,0,1) + 1(0,1,1) + 1(0,-1,0) = (-x, 0, -x+1)$$

de donde se deduce que $x = -1$.

(1.b) Consideramos el esquema dado por

$$\underset{C}{R^3} \xrightarrow{Id} \underset{B}{R^3} \xrightarrow{f} \underset{B}{R^3} \xrightarrow{Id} \underset{C}{R^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_C(f) = M_{B.C}(Id) \times M_B(f) \times M_{C,B}(Id)$$

es decir

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

y la expresión analítica de f es

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1.c) Vamos a resolver este apartado con la matriz obtenida en el apartado anterior. Si calculamos primero la base para Im(f), como sabemos que se verifica

$$\operatorname{Im}(f) =< (-2,0,-4),(-1,0,-2),(1,-1,2) >=< (-1,0,-2),(1,-1,2) >$$

por lo que $\operatorname{Im}(f)$ tiene dimensión 2 (por tanto *f* no es suprayectiva). De aquí conocemos que la dimensión del núcleo habrá de ser 1; para hallar una base suya, hacemos

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

por lo que $Ker(f) =< (x,-2x,0) >=< (1,-2,0) >$, y también sabemos que *f* no es inyectiva.

– –

2. **Se considera la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Analizar si es diagonalizable, y, en caso afirmativo, calcular la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

Solución: Calcularemos primero los valores propios de A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

que tiene por raíces $\lambda_1 = -1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$ (simple). Veamos ahora cuales son los subespacios vectoriales asociados a cada uno de los anteriores:

V_{λ_1} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = z$$

Por tanto

$$V_{\lambda_1} = \{(x,y,x)\} =< (1,0,1),(0,1,0) >$$

por lo que tiene dimensión 2 (coincide por tanto con la multiplicidad del valor propio λ_1).

V_{λ_2} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Por tanto

$$V_{\lambda_2} = \{(0,y,y)\} =< (0,1,1) >$$

por lo que tiene dimensión 1 (coincide por tanto con la multiplicidad del valor propio λ_2).

Así, A es matriz diagonalizable y se verificará

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

– –

3. **Calcular**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \operatorname{sen}^2 x - x}{\operatorname{sen}(x^2)}$$

Solución: Podemos aplicar equivalencias en el denominador, ya que $\operatorname{sen}(x^2) \sim x^2$ cuando $x \to 0$. Por tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \operatorname{sen}^2 x - x}{\operatorname{sen}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \operatorname{sen}^2 x - x}{x^2} = L'Hôpital =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 1}{2x} = L'Hôpital =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} - 2\cos x \cdot \cos x + 2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{2} = \ldots = \frac{-3}{2}$$

– –

4. **Calcular la integral impropia**

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{4+x^4}\,dx$$

Solución: Como resulta ser

$$\int \frac{x}{4+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{x}{1+\frac{x^4}{4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right) + Cte$$

tendremos entonces (aplicando la regla de Barrow generalizada)

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{4+x^4}\,dx = \left[\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) - \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}$$

– –

5. **Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de la función** $f(x,y) = x \cdot y^2$ **en el compacto definido por**

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

¿Puede garantizarse que dichos puntos existen? ¿Por qué?

Solución: Dichos valores siempre van a existir puesto que f es una función contínua y el conjunto K es compacto (Th. Weierstrass). Para calcular dichos valores estudiamos por separado lo que ocurre en el interior y en la frontera de K (que es el círculo de radio 1 restringido al 1er cuadrante):

- Puntos críticos en $int(K)$: Si resolvemos el sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; obtenemos como solución del mismo el punto $(0,0)$ y tambien puntos de la forma $(x,0)$. Puesto que ambos puntos no están en el interior de K (están en la frontera), no tenemos candidatos en este interior a ser máx. o mín.
- La frontera está formada por 3 curvas: el eje X, el eje Y, y la porción de circunferencia restringida al 1er cuadrante. Si calculamos los posibles candidatos en cada una de las curvas:
  - En el eje X (recta $y = 0$), la función $f(x,y) = x \cdot y^2 = 0$, lo que quiere decir que siempre se anula en dichos puntos.
  - Igualmente ocurre en el eje Y (recta $x = 0$), la función $f(x,y) = x \cdot y^2 = 0$.
  - En el primer cuadrante de la curva $x^2 + y^2 = 1$, como $y^2 = 1 - x^2$, se tiene que $f(x,y) = x \cdot y^2 = x \cdot (1 - x^2)$, que tiene por puntos críticos ($f'(x) = 0$) solamente $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; siendo en este punto $y = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Por tanto solo tenemos como posible candidato el punto $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
- Si evaluamos f en todos los puntos obtenidos anteriormente, resulta que f se anula en los ejes de coordenadas, siendo además $f(A) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Por tanto, f alcanza su máximo en el punto A (siendo su valor $\frac{2}{3\sqrt{3}}$), mientras que alcanza su mínimo en todos los puntos de los ejes de coordenadas, siendo este mínimo el valor 0.

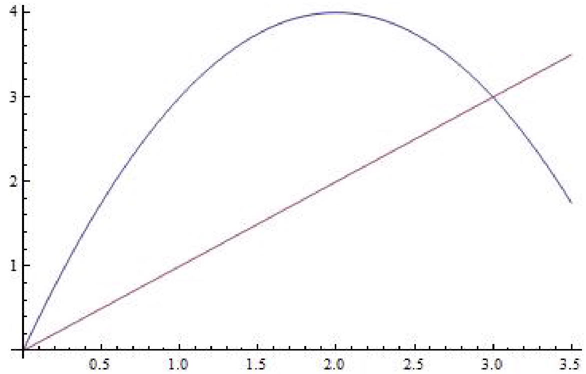
_ _

6. **Calcular**

$$\int\int_D xdxdy$$

siendo D **la región plana encerrada por las curvas** $y = -x^2 + 4x$ **e** $y = x$.

Solución: La representación gráfica de D es



por lo que en la región dada se tiene que si $0 \leq x \leq 3$ entonces $x \leq y \leq -x^2 + 4x$. De esta forma

$$\int\int_D xdxdy = \int_0^3 dx \int_x^{-x^2+4x} xdy = \int_0^3 x(-x^2 + 3x)dx = \frac{27}{4}$$

_ _

7. **Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:**

7.a $y' - y = x \cdot y^2$ **(Nota: realizar el cambio de variable** $z = \frac{1}{y}$**).**

7.b $\begin{cases} -y'' + 4y' = 75\cos(3x) \\ \\ y(0) = 5,\ y'(0) = 8 \end{cases}$

(7.a) Si hacemos $z = \frac{1}{y}$ se tendrá que $z' = -\frac{y'}{y^2}$, y puesto que la ecuación inicial puede ponerse como

$$y' - y = x \bullet y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}y' - \frac{1}{y} = x$$

obtendremos entonces una nueva ecuación

$$-z' + z = x \Leftrightarrow z' - z = x$$

que se trata de una ecuación diferencial lineal de 1er orden. Sabemos que su solución viene dada por

$$z(x) = e^{-\int -1dx}\left(\int -xe^{\int -1dx}dx + C\right) = -e^x\left(\int xe^{-x}dx + C\right) = -e^x(-e^{-x} - xe^{-x} + C) = 1 + x - Ce^x$$

Por tanto,

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{1 + x - Ce^x}$$

(7.b) La ecuación característica es $r^2 - 4r = 0$, que tiene por raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = 4$. Así, la solución general de la ecuación homogénea asociada vendrá dada por

$$y_{GH} = C_1e^{0x} + C_2e^{4x} = C_1 + C_2e^{4x}$$

A esta solución general hemos de sumarle una solución particular de la ecuación no homogénea. Puesto que la parte no homogénea viene dada por $75\cos(3x)$, probaremos con una solución del tipo

$$y_{PNH} = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación inicial, e identificando coeficientes, se llega a $A = 3$ y $B = 4$. Por tanto, la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) = y_{GH} + y_{PNH} = C_1 + C_2e^{4x} + 3\cos(3x) + 4\sin(3x)$$

Como se trata de resolver un PVI, usaremos las condiciones $y(0) = 5,\ y'(0) = 8$ para determinar C_1 y C_2. Exigiendo que se cumplan ambas condiciones, resulta ser $C_1 = 3,\ C_2 = -1,$ por lo que la solución del PVI es

$$y(x) = 3 - e^{4x} + 3\cos(3x) + 4\sin(3x)$$

DURACIÓN: 3 HORAS