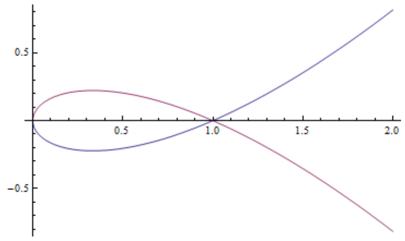
Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso.
Grupo A
2º Parcial. Curso 2010/2011. (03/06/2011)

1. Calcular el área y la longitud del lazo de la región del plano encerrada por la curva

$$3y^2 = x(x-1)^2$$

Solución. Se trata de una curva simétrica respecto del eje X y que corta al mismo en las abcisas 0 y 1



. Por tanto

$$Area = \int_0^1 y dx = \left| 2\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{3}}\,(x-1)dx \right| = \ldots = \frac{8}{45}\sqrt{3}$$

De igual forma

$$Longitud = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3x-1}{2\sqrt{3x}}\right)^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{3x+1}{2\sqrt{3x}}dx = \ldots = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

---

2. Hallar los extremos relativos, si los hubiera, de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

Solución. Calcularemos primero sus puntos críticos:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y \\ \\ y^2 = x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \text{ó} \\ x = 1 \text{e } y = 1 \end{array} \right.$$

Así tenemos dos puntos críticos $A(0,0)$ y $B(1,1)$. Para clasificarlos necesitamos del hessiano en cada uno de ellos. Puesto que se verifica

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$

tendremos que

$$Hf(A) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{y} \quad Hf(B) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} > 0$$

de donde se deduce que A es un punto de silla y B es un mínimo relativo.

---

3. Analizar si la expresión

$$x \cdot e^{z} + y \cdot e^{x-1} + z \cdot e^{y} = 2$$

define a z **como función implícita de** x **e** y **en un entorno de** $(x,y) = (1,1)$, **siendo** $z(1,1) = 0$**. En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano tangente a la superficie** $z(x,y)$ **en el punto** $(1,1)$**.**

Solución. Puesto que la expresión

$$\Psi(x,y,z) = x \cdot e^{z} + y \cdot e^{x-1} + z \cdot e^{y} - 2 = 0$$

verifica que

$$\Psi(1,1,0) = \ldots = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}(1,1,0) = \ldots = 1 + e \neq 0$$

es cierto que $z = z(x,y)$ en un entorno del punto dado. Necesitamos calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(1,1)$. Para ello, hemos de derivar (respecto de x y respecto de y) la expresión

$$x \cdot e^{z(x,y)} + y \cdot e^{x-1} + z(x,y) \cdot e^{y} - 2 = 0$$

Por ejemplo, si derivamos parcialmente respecto de x, resulta

$$1 \cdot e^{z(x,y)} + x \cdot e^{z(x,y)} \cdot z_x + y \cdot e^{x-1} + z_x \cdot e^{y} - 0 = 0$$

de donde particularizando en $(1,1)$, siendo $z(1,1) = 0$, se tiene

$$1 + 1 \cdot z_x(1,1) + 1 + z_x(1,1) \cdot e = 0$$

o lo que es lo mismo

$$z_x(1,1) = \frac{-2}{1+e}$$

Analogamente, si derivamos parcialmente respecto de y, obtendremos

$$z_y(1,1) = \frac{1}{1+e}$$

De esta forma, la ecuación del plano tangente dado, será

$$z - 0 = \frac{-2}{1+e}(x-1) + \frac{1}{1+e}(y-1)$$

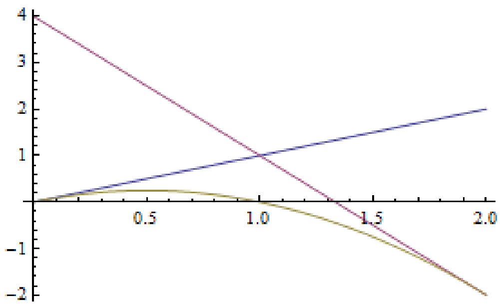
---

4. Calcular

$$\iint_D x \cdot e^{y-x} dxdy$$

siendo D **la región plana encerrada por la parábola** $y = x - x^2$ **y sus tangentes en los puntos** $(0,0)$ **y** $(2,-2)$.

Solución. Las tangentes del enunciado son, como se calcula trivialmente, las rectas $y = x$ e $y = 4 - 3x$. Acudiendo al teorema de Fubini, y descomponiendo la región D en dos subregiones (la primera con $0 \leq x \leq 1$ y la segunda con $1 \leq x \leq 2$),



se obtiene que

$$\begin{aligned}\int\int_D x\cdot e^{y-x}dxdy &= \int_0^1 x\cdot e^{-x}dx\int_{x-x^2}^{x} e^y dy+\int_1^2 x\cdot e^{-x}dx\int_{x-x^2}^{4-3x} e^y dy = \\ &= \int_0^1 x\cdot e^{-x}dx\cdot [e^y]_{y=x-x^2}^{y=x}+\int_1^2 x\cdot e^{-x}dx\cdot [e^y]_{y=x-x^2}^{y=4-3x} = \\ &= \int_0^1 x\left(1-e^{-x^2}\right)dx+\int_1^2 x\left(e^{4-4x}-e^{-x^2}\right)dx = \\ &= \ldots = \frac{5-e^{-4}}{16}\end{aligned}$$

---

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y PVI:

(5.a) $$y' = \frac{2+y\cdot e^{xy}}{2y-x\cdot e^{xy}}$$

(5.b) $$\begin{cases} y' = (y+1)x \\ y(0) = 4\end{cases}$$

(5.c) $$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 3y_2+x-1\end{cases}$$

Solución. **(5.a)** Si la edo se escribe en la forma

$$(2+y\cdot e^{xy})dx-(2y-x\cdot e^{xy})dy = 0$$

como se verifica

$$M_y = e^{xy}+y\cdot e^{xy}\cdot x = N_x$$

resulta que se trata de una edo exacta. Calculemos $f(x,y)$ tal que $f_x = M$ y $f_y = N$ (ya que sabemos que la solución de la edo viene dada por $f(x,y) = cte$): Como

$$f_x = M \Rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)dx+g(y) = \int(2+y\cdot e^{xy})dx+g(y) = 2x+e^{xy}+g(y)$$

De

$$f_y = N \Leftrightarrow e^{xy}\cdot x+g'(y) = -(2y-x\cdot e^{xy}) \Leftrightarrow g'(y) = -2y \Leftrightarrow g(y) = -y^2$$

Por tanto

$$f(x,y) = 2x+e^{xy}-y^2$$

y la solución general de la edo será

$$2x+e^{xy}-y^2 = cte$$

(5.b) Se trata de una edo en variables separadas (aunque también se puede expresar fácilmente como una lineal de primer orden). Si la resolvemos en variables separadas, tendremos

$$\frac{dy}{y+1} = xdx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y+1} = \int xdx \Leftrightarrow \log(y+1) = \frac{x^2}{2}+cte \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y = -1+C\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Para determinar la C, usaremos que $y(0) = 4$, de donde

$$4 = -1 + C \cdot e^0$$

por lo que $C = 5$ y la solución del PVI es

$$y = -1 + 5 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

(5.c) Sustituyendo directamente la 1ª ecuación en la segunda, se obtiene

$$y_1'' = 3y_1' + x - 1 \Leftrightarrow y_1'' - 3y_1' = x - 1$$

por lo que se trata de una edo lineal de 2º orden, de coef. ctes y no homogénea. La solución general de la homogénea asociada y_{GH} viene dada por las raíces del polinomio característico (que son 0 y 3), por lo que

$$y_{GH} = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^{3x} = C_1 + C_2 \cdot e^{3x}$$

Como la parte no homogénea es $x - 1$, inicialmente tomaremos como solución particular de la edo no homogénea

$$y_{PNH} = Ax + B$$

pero como hay repetición entre el término B y una parte de y_{GH} (se trata de C_1), tomaremos

$$y_{PNH} = Ax^2 + Bx$$

y sustituyendo en la ecuación $y_1'' - 3y_1' = x - 1$, se llega a $A = \frac{-1}{6}$ y $B = \frac{2}{9}$. Por tanto

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH} = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} - \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x$$

– –