Capítulo 1

Exámenes resueltos curso 2010/2011

1er parcial curso 2010/2011:
18 de enero de 2011

GRADO EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES Y GRADO EN ELECTRICIDAD

PROBLEMA 1.

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que verifica

$$Ker\,(f) = < (2,2,0,1)\,,(0,0,1,0) >$$
$$f\,(1,0,1,0) = (1,1,-1)\,;\; f\,(-1,-2,0,0) = (1,1,1)$$

Calcular:

a. La matriz de f respecto a las bases canónicas.

b. La dimensión y las ecuaciones de $Ker\,(f)$ e $Im(f)$.

c. La matriz de f respecto de las bases B_1 de $\mathbb{R}^4$ y B_2 de $\mathbb{R}^3$, siendo

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1,1,1,0)\,,(1,1,0,0)\,,(1,0,0,0)\,,(1,1,1,1)\} \\ B_2 &= \{(1,1,1)\,,(0,1,1)\,,(0,0,1)\} \end{aligned}$$

Solución.

a. Buscamos una matriz de la forma

$$M_C(f) = A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Como $(2,2,0,1)\,,(0,0,1,0) \in Ker(f)$, resultará que $f\,(2,2,0,1) = f\,(0,0,1,0) = (0,0,0)\,;$ como además se tiene que $f\,(1,0,1,0) = (1,1,-1)$ y $f\,(-1,-2,0,0) = (1,1,1)$, si planteamos estas cuatro igualdades en forma de matrices, se verificará

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\; A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\; A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\; A\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de manera que si resolvemos estos sistemas de ecuaciones (con incógnitas a_i, b_i, c_i, d_i), obtendremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Sabemos que $Im(f)$ está generado por las columnas de la matriz A :

$$Im(f) =< (1,1,-1), (-1,-1,0), (0,0,0), (0,0,2) >=< (1,1,-1), (0,0,2) >$$

ya que solo hay dos vectores independientes. Por tanto $\dim Im(f) = 2$, con lo que sabemos entonces que f no puede ser suprayectiva y $\dim Ker(f) = 2$, lo que ya sabíamos porque nos lo da el enunciado.

Hallemos sus ecuaciones para éste último: Si $(x, y, z, t) \in Ker(f)$, se tendrá

$$(x, y, z, t) = \alpha\,(2,2,0,1) + \beta\,(0,0,1,0)$$

Para hallar las ecuaciones de $Ker(f)$ sólo hemos de eliminar α y β de este sistema, cosa que si hacemos, obtendremos como resultado de esta eliminación $y = x$; $x = 2t$. Por tanto

$$Ker(f) = \{(x, y, z, t) \mid \; y = x; x = 2t\}$$

Nota: De forma similar puede actuarse para hallar las ecuaciones de $Im(f)$.

c. Se trata de aplicar el siguiente esquema

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{R}^4 \cdots > & \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 & \cdots > \mathbb{R}^3 \\ B_1 & C \rightarrow C & \rightarrow B_2 \\ M_{B_1,C} & M_C(f) & M_{C,B_2} \end{array}$$

por lo que

$$\begin{aligned} M_{B_1,B_2}(f) &= M_{C,B_2} \times M_C(f) \times M_{B_1,C} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

se pide:

a. Estudiar, en función de los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$, si la matriz es o no diagonalizable.

b. Usando resultados de diagonalización, calcular A^n para $c = 0$.

Solución.

a. El polinomio característico de la matriz viene dado por:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = c$. Por tanto, distinguiremos los casos $c = 1$ y $c \neq 1$:

- Si $c = 1$, solo hay un único valor propio $\lambda = 1$ (triple). Su subespacio vectorial propio asociado resulta ser

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \left\{ (x,y,z) \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \cdots = \\ &= \{(x,y,z) \mid y = z = 0\} = \{(x,0,0)\} =< (1,0,0) > \end{aligned}$$

  Como $\dim V_\lambda = 1$ y $\lambda = 1$ es triple, A no es diagonalizable.

- Si $c \neq 1$ tenemos dos valores propios, $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = c \neq 1$ (simple). Hallemos los respectivos subespacios vectoriales propios asociados:
  - Para V_{λ_1} :

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{ (x,y,z) \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \cdots = \\ &= \{(x,y,z) \mid ay = 0;\ z = 0\} \end{aligned}$$

    Así, si $a \neq 0$, ha de ser $y = 0$, y como $z = 0$, será $V_{\lambda_1} = \{(x,0,0)\}$, que tiene dimensión 1, por lo que A no es diagonalizable en este caso.. Sin embargo, si $a = 0$, se tendrá que

$$V_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \mid \ z = 0\} = \{(x,y,0)\} =< (1,0,0)\,, (0,1,0) >$$

    por lo que al ser $\dim V_{\lambda_1} = 2$, la matriz A será diagonalizable.
  - También hallaremos V_{λ_2} para el caso $a = 0$ (es el único valor para el que A es diagonalizable) ya que será necesario para resolver el siguiente apartado:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \left\{ (x,y,z) \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \cdots = \\ &= \left\{ (x,y,z) \mid x = \frac{z}{c-1};\ y = \frac{bz}{c-1} \right\} = \left\{ \left(\frac{z}{c-1}, \frac{bz}{c-1}, z \right) \right\} = \\ &= < \left(\frac{1}{c-1}, \frac{b}{c-1}, 1 \right) >=< (1, b, c-1) > \end{aligned}$$

b. Del apartado anterior resulta que si $c \neq 1$ y $a = 0$, existe P invertible tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$A^n = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right) = PD^nP^{-1}$$

que, en nuestro caso ($c = 0$)

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 3.

En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual. Se pide:

a. Hallar una base ortonormal del subespacio

$$W = \{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 0\}$$

y otra de $W^{\perp}$.

b. Determinar la proyección ortogonal del vector $(1, -1, 2)$ sobre W.

Solución.

a. Hallamos una base de W :

$$W = \{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 0\} = \{(x, -2x + 3z, z)\} =< (1, -2, 0), (0, 3, 1) >$$

Si denotamos por e_1 y e_2, respectivamente, a estos dos vectores, para conseguir una base ortonormal, aplicaremos el método de ortogonalización de G-S, de manera que

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 = (1, -2, 0) \\ u_2 &= e_2 - \frac{u_1 \bullet e_2}{u_1 \bullet u_1} u_1 = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) \end{aligned}$$

Ahora solo hemos de dividir u_1 y u_2 por su módulo para que ambos sean unitarios y $\{u_1, u_2\}$ sea base ortonormal.

Para $W^{\perp}$, sabemos que

$$W^{\perp} =< (2, 1, -3) >$$

(es el vector normal del plano que define a W). Para que este único vector, que es una base de $W^{\perp}$, sea ortonormal solamente hemos de dividirlo por su módulo.

b. Se trata de poner

$$(1, -1, 2) = u + v, \text{ con } u \in W \text{ y } v \in W^{\perp}$$

y la proyección ortogonal pedida es u :

Como $u \in W$ y $v \in W^{\perp}$ se tendrá

$$(1,-1,2) = \alpha\,(1,-2,0) + \beta\,(0,3,1) + v$$

y si multiplicamos escalarmente por los dos vectores de la base de W

$$\begin{aligned}
(1,-1,2) \bullet (1,-2,0) &= \alpha\,(1,-2,0) \bullet (1,-2,0) + \beta\,(0,3,1) \bullet (1,-2,0) + v \bullet (1,-2,0) \\
(1,-1,2) \bullet (0,3,1) &= \alpha\,(1,-2,0) \bullet (0,3,1) + \beta\,(0,3,1) \bullet (0,3,1) + v \bullet (0,3,1)
\end{aligned}$$

y como $v \bullet (1,-2,0) = v \bullet (0,3,1) = 0$ (ya que $v \in W^{\perp}$) resulta ser

$$\left\{ \begin{array}{r} 3 = 5\alpha - 6\beta \\ -1 = -6\alpha + 10\beta \end{array} \right.$$

de donde $\alpha = \frac{12}{7}$ y $\beta = \frac{13}{14}$, por lo que la proyección pedida es

$$u = \frac{12}{7}\,(1,-2,0) + \frac{13}{14}\,(0,3,1)$$

PROBLEMA 4.

a. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\operatorname{cosec} x}$$

b. Encontrar un valor aproximado para $\operatorname{sen}(35^o)$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3. Estimar el error cometido.

Solución.

a. Se trata de una indeterminación de la forma 1^{∞}, por lo que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\operatorname{cosec} x} = e^{(*)}$$

siendo

$$(*) = \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cosec} x\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x} - 1\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen} x}\,\frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x\,(1+\operatorname{sen} x)}$$

donde hemos aplicado una equivalencia en el denominador. Si resolvemos este límite usando regla de L'Hôpital, resulta ser 0, por lo que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\operatorname{cosec} x} = e^{0} = 1$$

b. Se tiene que $35^o \equiv \frac{7\pi}{36}$. Lo mejor para aproximar el valor pedido es desarrollar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en un punto a cercano al pedido (que es $35^o \equiv \frac{7\pi}{36}$), y que sea posible calcular (de forma fácil) el valor de $f(x)$ y de sus sucesivas derivadas. Un valor próximo a éste y que cumple los requisitos sería $a = 30^o \equiv \frac{\pi}{6}$; también podríamos considerar $a = 0$, es decir la fórmula de McLaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$, aunque, al estar el punto $a = 0$ mas lejano que $a = 30^o \equiv \frac{\pi}{6}$ del punto pedido, el error será mayor. No obstante, y por comodidad, lo haremos en este último punto, es decir, vamos a considerar un desarrollo de McLaurin de grado 3 (resto en grado 4) para $f(x) = \operatorname{sen} x$:

Sabemos que

$$f(x) = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + Resto$$

por lo que usando este desarrollo

$$\operatorname{sen}(35^o) \equiv \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{36}\right) = \frac{7\pi}{36} - \frac{\left(\frac{7\pi}{36}\right)^3}{3!}$$

siendo

$$Error = \left|Resto \text{ en } \frac{7\pi}{36}\right| = \left|\frac{f^{IV}(c)}{4!}\left(\frac{7\pi}{36}\right)^4\right|$$

con $0 < c < \frac{7\pi}{36}$, pero al ser $\left|f^{IV}(c)\right| < 1$, resulta que

$$Error < \left|\frac{1}{4!}\left(\frac{7\pi}{36}\right)^4\right|$$

PROBLEMA 5.

La compañía Light produce dos dispositivos para las lámparas (productos 1 y 2) que requieren partes de metal partes y componentes eléctricas. La administración desea determinar cuántas unidades de cada producto se deben fabricar para maximizar la ganancia. Por cada unidad del producto 1 se requieren 1 unidad de partes de metal y 2 unidades de componentes eléctricas; por cada unidad del producto 2 se requieren 3 unidades de partes de metal y 2 unidades de componentes eléctricas. La compañía dispone de 200 unidades de partes de metal y 300 de componentes eléctricas, y de cada unidad del producto 1 se obtiene una ganancia de 2 euros y cada unidad de producto 2, hasta 60 unidades, da una ganancia de 4 euros (cualquier exceso de 60 unidades de esta unidad no tiene ganancia por lo que no se considera fabricar más de 60). Se pide:

a. Formular el problema de programación lineal.

b. Utilizar el método gráfico para resolver este modelo, e indicar cuál es la ganancia total que resulta.

Solución.

Si denotamos por x a la cantidad total de producto 1, y por y a la de producto 2. Por tanto, la función a maximizar (beneficio) vendrá dada por

$$f(x, y) = 2x + 4y$$

Por otra parte, las restricciones vienen dadas por:

- Partes de metal (se dispone de un máximo de 200): $1x + 3y \leq 200$.
- Partes de componente eléctrico (máx. de 300): $2x + 3y \leq 300$.
- De producto 2 se fabrican como máx. 60 unidades: $y \leq 60$.
- Y como siempre, ha de ser $x, y \geq 0$.

Si se representan todas estas inecuaciones, se obtiene un recinto cerrado en el primer cuadrante, con puntos extremos (vértices): $A(0,60)$, $B(20,60)$, $C(125,25)$, $D(150,0)$ y $E(0,0)$. Como

$$f(A) = 240;\ f(B) = 280;\ f(C) = 350;\ f(D) = 300;\ f(E) = 0$$

resultará que el máximo se alcanza en el punto C, por lo que habrá que fabricar 125 unidades de producto 1 y 25 de producto 2. La ganancia es de 350.