Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Problemas de Álgebra

Aplicaciones Lineales

1. Dadas las siguientes aplicaciones entre los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales que se indican, razonar si son o no son aplicaciones lineales:

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_1(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 0)$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_2(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 8)$.

iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x, y, z) = 2x + y - 5z$.

iv) $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x, y, z) = x^2 + y - 5z$.

v) $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_5(x, y) = (x, -2y, x + y)$.

vi) $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_6(x, y) = (x, y - 2, 0)$.

vii) $f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_7(x, y) = |x + y|$.

viii) $f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_8(x, y) = (x + y)^2$.

ix) $f_9 : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \mid f_9(p(x)) = p'(x)$.

x) $f_{10} : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \mid f_{10}(p(x)) = x \cdot p'(x)$.

2. Sean V, W K-espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Demostrar:

i) Si $S = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle \subseteq V$ entonces $f(S) = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r) \rangle$.

ii) Si $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es base de V entonces $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ es sistema generador de $\mathrm{Im} f$.

iii) Si f es suprayectiva entonces $\dim W \leq \dim V$.

3. ¿ Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (21, -3)$, $f(0, 0, 1) = (-1, 2)$ y $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$? ¿ Y si fuera $f(1, 0, 1) = (0, 3)$?

4. Para las aplicaciones lineales del ejercicio 1 obtener la matriz asociada en las bases canónicas, el núcleo, la imagen y clasificarlas (obtener si son o no inyectivas, suprayectivas o biyectivas).

5. Sean V, W K-espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow W$ aplicación lineal. Demostrar que $\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$.

6. **i)** Demostrar que los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}^3$:
$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $B_2 = \{(1,-1,0),(1,0,-1),(-1,1,1)\}$,
$B_3 = \{(1,1,-1),(0,-1,1),(-1,0,1)\}$.
ii) Encontrar las matrices de cambio de base en cada uno de los siguientes casos y utilizar éstas para obtener a partir de las coordenadas en la primera base de $v = (-1,2,1)$, las coordenadas de éste en la segunda:
a) De B_1 a B_2. **b)** De B_2 a B_1. **c)** De B_1 a B_3. **d)** De B_3 a B_1. **e)** De B_2 a B_3.
f) De B_3 a B_2.

7. En los siguientes casos, obtener la matriz de f en las bases canónicas respectivas y $\mathrm{M}_{B,B'}(f)$:
i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_1(x,y,z) = (x+2z, 2x+y+z)$, $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, $B' = \{(1,1),(1,0)\}$.
ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_2(x,y) = (2x+y, 2x+y, x+2y)$, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$, $B' = \{(1,1,1),(0,2,0),(0,-1,1)\}$.
iii) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_3(x) = (x, 3x)$, $B = \{2\}$, $B' = \{(1,1),(0,1)\}$.
iv) $f_4 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x,y,z,t) = x-y+z$, $B = \{(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,1,1)\}$, $B' = \{-2\}$.
v) $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (0,0)$, $B = B' = \{(1,1),(2,1)\}$.

8. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(u_1) = -u_1$, $f(u_2) = u_1 + 2u_2 + 2u_3$, $f(u_3) = -u_2 - u_3$. Supongamos que la matriz de cambio de base de B a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular:
i) $\mathrm{M}_B(f)$, $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$.

ii) $f^{-1}(S)$ donde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, y - z = 0\}$.

9. Determinar una endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique que $\text{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ y $f(0,1,1) = (2,1,-1)$.

10. Determinar una endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique que $\text{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0, x + z = 0\}$ e $\text{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

11. Consideremos la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,0,1)\}$ y la base de $\mathbb{R}^2$ $\tilde{B} = \{(-1,1),(-1,0)\}$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que

$$M_{B,\tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i) La matriz de la aplicación f respecto de la bases canónicas respectivas.

ii) La expresión analítica de dicha aplicación.

iii) El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.

iv) Clasifica f.

12. Consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ $B = \{(1,-1),(0,1)\}$ y la base de $\mathbb{R}^3$ $\tilde{B} = \{(-1,-1,0), (-1,0,1),(2,0,0)\}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$M_{B,\tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i) La matriz de la aplicación f respecto de la bases canónicas respectivas.

ii) La expresión analítica de dicha aplicación.

iii) El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.

iv) Clasifica f.

13. Consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ $B = \{(1,-1),(0,1)\}$ y la base de $\mathbb{R}$ $\tilde{B} = \{2\}$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que

$$M_{B,\tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i) La matriz de la aplicación f respecto de la bases canónicas respectivas.

ii) La expresión analítica de dicha aplicación.

iii) El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.

iv) Clasifica f.

14. Consideremos la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1,-1,1),(0,1,-1),(1,0,-1)\}$. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i) La matriz de la aplicación f respecto de la base canónica.

ii) La expresión analítica de dicha aplicación.

iii) El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.

iv) Clasifica f.

15. Consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ $B = \{(1,-1),(1,1)\}$. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i) La matriz de la aplicación f respecto de la base canónica.

ii) La expresión analítica de dicha aplicación.

iii) El núcleo y la imagen de f y bases de estos subespacios.

iv) Clasifica f.

Problemas de exámenes

16. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+3 & 4 \\ 1 & a+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada al endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica.

a) Determinar razonadamente los valores de a para los cuales f^{-1} es aplicación(valores de a para los cuales A es invertible). ¿Cuál sería la matriz asociada a f^{-1} respecto de la base canónica? Obtenerla para el caso de que $a = -2$.

b) Para $a = -1$, calcula Ker$f$, Imf, dando ecuaciones bases y dimensiones de éstos.

c) Discutir según los valores de a y b si existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x, y, z) = (1, 2b, b)$.

17. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ donde $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0)$,$u_3 = (1, 1, 1)$ y sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica.

a) Obtener las matrices de cambio de base de B a B' y de B' a B.

b) Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por: $f(u_1) = u_1 + u_2$; $f(u_2) = u_1 + u_3$; $f(u_3) = u_2 - u_3$.

-Hallar la matriz de dicho endomorfismo referida a la base B'.

-Hallar la matriz de dicho endomorfismo referida a la base canónica B.

-¿ Existe alguna relación entre ellas? En caso afirmativo explicar dicha relación.

c) Si $v = e_1 + 2e_2 - e_3$, hallar su imagen y expresarla en ambas bases.

18. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ y sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que:

$$\mathrm{M}_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & x \end{pmatrix}$$

i) Calcula x para el cual f no es suprayectiva.

Para dicho valor de x.

ii) Calcula la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base canónica.

iii) Calcula bases del núcleo y de la imagen de f ¿Es f inyectiva?

iv) Calcula las coordenadas de $f(1, 1, 1)$ respecto de la base B.