Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Problemas de Álgebra

Espacios Vectoriales

1. Estudiar cual de los siguientes subconjuntos es subespacio de $\mathbb{R}^n$ para el n correspondiente:

i) $S_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = b\}$ siendo $b \in \mathbb{R}$.

ii) $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y = 0\}$.

iii) $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = b\}$ siendo $b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

iv) $S_4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 2x_2, 2x_3 - x_4 = 0\}$.

v) $S_5 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq x_2\}$.

vi) $S_6 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 = b\}$ siendo $b \in \mathbb{R}$.

vii) $S_7 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0, 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.

2. Obtener las ecuaciones implícitas, una base y la dimensión:

a) De los subespacios del ejercicio 1.

b) De los siguientes subespacios:

b.1) $U_1 = \langle (1,1,1), (0,1,0) \rangle$.

b.2) $U_2 = \langle (1,1,0), (-2,-2,0) \rangle$.

b.3) $U_3 = \langle (1,1,-1), (1,-2,0), (2,-1,-1) \rangle$.

b.4) $U_4 = \langle (1,1), (-1,1), (1,0) \rangle$.

3. De las siguientes afirmaciones, demostrar las que son ciertas y dar un contraejemplo para las falsas.

3.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Entonces:

a) Todo sistema de $n+1$ vectores de V siempre genera a V.

b) Un sistema de m vectores de V con $m < n$ es un sistema libre.

c) Un sistema libre de V con n vectores es un sistema generador de V.

d) Un sistema generador de V con n vectores es un sistema libre.

e) Todo sistema de V que contenga al vector nulo es ligado.

f) Todo sistema de V que no contenga al vector nulo es libre.

3.2) Si V es un espacio vectorial y $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ es un sistema libre, entonces:

a) $\{u_1, u_2 - u_1, u_3 - u_2\}$ es un sistema libre.

b) $\{u_1 - u_2, u_2 - u_1, u_3 - u_2\}$ es un sistema libre.

c) $\{u_1 + u_2, u_2 - u_1, u_3 - u_2\}$ es un sistema libre.

d) $\{u_1, u_2\}$ es un sistema libre.

e) $\{u_1, u_2, v\}$ con $v = au_1 + bu_2 + cu_3$, $c \neq 0$ es un sistema libre.

f) Si $\{u_1, w\}$ y $\{u_2, w\}$ son sistemas libres, entonces $\{u_1, u_2, w\}$ es sistema libre.

4. Sea V un espacio vectorial finitamente generado y $U, W \leq V$.

(i) Demostrar que si B es una base de $U \cap W$ entonces existen B_1 y B_2 bases de U y W respectivamente tales que B está contenida en ambas. Demostrar que $B' = B_1 \cup (B_2 \setminus B)$ es una base de $U + W$.

(ii) Deduce del apartado anterior que se verifica:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

(iii) Demuestra que la suma de U y W es directa si y solo si $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$.

5. Sean $S, T \leq \mathbb{R}^4$ donde

$$S = \langle (1, -1, 0, 1), (2, 1, 1, 0), (1, 2, 1, -1) \rangle$$

$$T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, 3x - 4z + t = 0\}.$$

Calcula:

(i) Una base y la dimensión de S y T.

(ii) Los subespacios $S \cap T$ y $S + T$, dando bases de dichos subespacios vectoriales.

(iii) ¿Es la suma de S y T directa?

6. Sean $U_1, U_2 \leq \mathbb{R}^3$ donde

$$U_1 = \{(a, -a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$U_2 = \langle (1, 1, 2), (1, -2, -1), (3, -1, 2) \rangle.$$

Calcula:

(i) Una base y la dimensión de U_1 y U_2.

(ii) Los subespacios $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$, dando bases de dichos subespacios vectoriales.

(iii) ¿Es la suma de U_1 y U_2 directa?

7. Sean $U_1, U_2 \leq \mathbb{R}^4$ donde

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 2x_2, 2x_3 - x_4 = 0\}$$

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Calcula:

(i) Una base y la dimensión de U_1 y U_2.

(ii) Los subespacios $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$, dando bases de dichos subespacios vectoriales.

(iii) ¿Es la suma de U_1 y U_2 directa?

8. Determinar si los siguientes sistemas de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes o dependientes. Obtener su rango y una base del subespacio que generan. Cuando sea posible expresar uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(i) $S_1 = \{(3, 1, 2), (1, -1, 2), (0, 1, 2)\}$.

(ii) $S_2 = \{(3, 1, 2), (1, -1, 2), (0, 1, 2), (4, -1, 2)\}$.

(iii) $S_3 = \{(1, 2, 3), (-1, 1, 0), (2, 1, 3)\}$.

(iv) $S_4 = \{(1, 1, a), (1, a, 1), (0, 0, 0), (a, 1, 1)\}$.

9. Sea $S = \{(1, -1, 1), (2, m - 1, 2), (1, m, m + 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(i) Obtener según los valores de m una base y la dimensión del subespacio $U = \langle S \rangle$.

(ii) Para que valores de m y n pertenecerá el vector $(1, n, n)$ al subespacio U.

10. Sea $\mathbb{R}_n[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial formado por los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que n.

(i) Demostrar que x^n y sus n primeras derivadas forman una base de $\mathbb{R}_n[x]$. Dar otra base.

(ii) Si $W = \langle 1+3x+x^2, -1+2x^2, 3+3x+x^2 \rangle \leq \mathbb{R}_2[x]$, ¿pertenecen $1+x^2$ y $7+6x$ a W? Dar las coordenadas de éstos en las bases obtenidas en **(i)**.

11. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se consideran los sistemas de vectores $B = \{e_1, e_2\}$ y $C = \{u_1, u_2\}$ donde $e_1 = (1,1)$, $e_2 = (1,-1)$, $u_1 = (1,0)$ y $u_2 = (0,1)$.

(i) Comprobar que son bases de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Hallar las coordenadas de los vectores $v = 2u_1 - u_2$ y $w = 2e_1 - e_2$ en la base C y en la base B.

Problemas de exámenes

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se consideran los subespacios $S = \langle x^2+x-1, x^2+x+1 \rangle$ y $T = \langle x^2+x, -x^2+x-1 \rangle$. Calcula bases de S, T, $S \cap T$ y $S+T$.

13. Si $S = \langle (1,1,-1,1), (1,1,0,1) \rangle$ y $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x-y-t = 0, 4x-3y+2z = 0\}$, calcula bases, ecuaciones cartesianas y dimensión de S, T, $S \cap T$ y $S+T$.

14. Si $U = \langle (1,-1,0,1), (-1,-1,0,0) \rangle$ y $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-z = 0, 2x+y-z+2t = 0\}$, dar bases y dimensiones de U, T, $U+T$, $U \cap T$.

15. Sean $S = \langle (-1,1,1), (1,-1,0), (0,0,1) \rangle$ y $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0\}$. Calcula bases de S, T, $S \cap T$ y $S+T$.

16. Sean $S = \langle (1,1,1), (-1,1,0), (2,-2,0) \rangle$ y $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y-2z = 0\}$. Calcula bases de S, T, $S \cap T$ y $S+T$.

17. Sea $S = \langle (1, 2-1), (1,a,-1), (a,-1,-1) \rangle$ y $v = (1,0,b)$. **i)** ¿Para qué valores de a y de b será v un vector de S?

ii) Para $a = 2$ ¿Es cada uno de los vectores del sistema generador anterior de S combinación lineal de los otros dos vectores? Calcula una base y la dimensión del subespacio S y da las coordenadas del vector v en dicha base.