Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Diferenciabilidad de funciones de varias variables

1. Analiza la continuidad, existencia de derivadas direccionales, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iv) $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

v) $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

vi) $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. Calcula las derivadas parciales de las funciones anteriores en (a,b) siendo $(a,b) \neq (0,0)$.

3. Calcula para las siguientes funciones la matriz jacobiana y la diferencial en los puntos indicados:

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (x^2y - xy, x^3 - y^3)$ en $(1, 1)$.

ii) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid g(x, y, z) = (x^2y - xyz + z^3, x^3 - y^3 + z^3)$ en $(1, 1, 1)$.

iii) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid h(x, y) = (\cos x \cos y, \sin x \sin x, \sin x \cos y)$ en $(\pi/2, 0)$.

iv) $l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid l(x) = (\mathrm{e}^x, 2x, 3x^2)$ en 0.

4. Calcula el gradiente en el punto indicado de las siguientes funciones:

i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x, y) = x^{x+y}$ en $(1, 1)$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x, y, z) = \frac{x^2+\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^z}$ en $(0, 0, 0)$.

5. Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto indicado:

i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x, y) = x^2y^2 + 2x + 2y$ en $(1, 0)$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x, y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x, y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$ en $(-1, -1)$.

6. Supongamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $a \in A$ tal que $\mathrm{d}f(a)(x, y) = (x + y, x + 2y, y)$. Calcula las derivadas parciales y las derivadas direccionales en la direcciones de los vectores $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (-1, -1)$ y $v_3 = (0, -1)$ de las funciones coordenadas de f en a, y la matriz jacobiana de f en a.

7. Supongamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y $a \in A$ tal que la matriz jacobiana de f en a es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula la diferencial de f en a y las derivadas parciales y las derivadas direccionales en la direcciones de los vectores $v_1 = (-1, -1, 1)$, $v_2 = (-1, -1, -1)$ y $v_3 = (0, -1, 0)$ de las funciones coordenadas de f en a.

8. Supongamos $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y $a \in A$ tal que $\mathrm{D}_{v_1}f(a) = -1$, $\mathrm{D}_{v_2}f(a) = 1$ y $\mathrm{D}_{v_3}f(a) = 0$ siendo $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$. Calcula las derivadas parciales y la diferencial de f en a.

9. Sean $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ tales que $f(x,y,z)=(x^2+y^2+xz,xy+xz+yz)$ y $g(x,y)=(x+y,x-y)$. Calcula la matriz jacobiana de $F=g\circ f$ en $(-1,1,0)$.

10. Sean $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ tales que $f(x,y)=(x^2+y^2,x+y,x-y)$ y $g(x,y,z)=(x+y+z,x-y-z)$. Calcula la matriz jacobiana de $F=g\circ f$ en $(0,1)$.

11. Dada una función real $z=z(x,y)$ tal que $z\in\mathcal{C}^2(A,\mathbb{R})$ siendo A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$, se define el laplaciano de ésta como:

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Expresar Δz en coordenadas polares.

12. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y sea $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$F(x,y)=f(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}).$$

Comprueba que se satisfacen las siguientes igualdades:
i) $x^2\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+y^2\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0$.
ii) $x^3\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+y^3\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)+xy(x+y)\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y)=0$.

13. Sea $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Comprobar que

$$\frac{1}{x^2+y^2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y))=4(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v))$$

donde $u=x^2-y^2$ y $v=2xy$.

14. Sea $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Comprobar que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2uv(\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(u,v)-u\frac{\partial f}{\partial u}(u,v))$$

siendo $u=\frac{x}{y}$ y $v=xy$.

15. Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 en los puntos indicados de las siguientes funciones:

i) $f_1(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ en $(0,0)$

ii) $f_2(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$ en $(0,0)$.

iii) $f_3(x,y) = x^y$ en $(1,1)$.

iv) $f_4(x,y) = \sin x \sin y$ en $(0,0)$.

v) $f_5(x,y) = \log(x+y)$ en $(1,1)$.

vi) $f_6(x,y,z) = \cos x \cos y \sin z$ en $(0,0,0)$.

vii) $f_7(x,y) = \mathrm{e}^{x+y+z}$ en $(0,0,0)$.

16. Calcula los extremos relativos de las siguientes funciones:

i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x,y) = (x+2)^2 + (y-1)^2$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x,y) = (x+1)^2 - (y+1)^2$.

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x,y) = -(x+2)^2 + (y+1)^2$.

iv) $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x,y) = -(x+2)^2 - (y+1)^2$.

v) $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_5(x,y) = (x-1)^2 - (y-1)^2$.

vi) $f_6 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_6(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

vii) $f_7 : D_7 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_7(x,y) = x^2 - 3x + y^2$ siendo $D_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4, x < 0\}$.

viii) $f_8 :]0,\pi[\times]0,\pi[\times]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R} \mid f_8(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$.

ix) $f_9 : D_9 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_9(x,y) = x^2 - y^2$ siendo $D_9 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$.

x) $f_{10} : D_{10} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{10}(x,y,z) = xy$ siendo $D_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 1\}$.

xi) $f_{11} : D_{11} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{11}(x,y) = x^2+y^2$ siendo $D_{11} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 1\}$.

xii) $f_{12} : D_{12} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{12}(x,y) = 2x^2 - 3 - 2xy^2$ siendo $D_{12} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

xiii) $f_{13} : D_{13} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{13}(x,y,z) = \cos x \cos y \cos z$ siendo $D_{13} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = \pi\}$.

xiv) $f_{14} : D_{14} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{14}(x,y,z) = 2x + y + z$ siendo $D_{14} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, x+z = 1\}$.

xv) $f_{15} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{15}(x,y) = xy^2(1-x-y)$.

xvi) $f_{16} : D_{16} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{16}(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 20x + 20y + 10$ siendo $D_{16} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+xy-12 = 0\}$.

xvii) $f_{17} : D_{17} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{17}(x,y) = x^2 + xy + y^2$ siendo $D_{17} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

xviii) $f_{18} : D_{18} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{18}(x,y,z) = x^2 + 2y - z^2$ siendo $D_{18} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0, y + z = 0\}$.

17. Determina los extremos absolutos de las siguientes funciones:

i) $f_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x,y) = x^2+y^2+16x-12y$ siendo $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 25\}$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ en $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \leq 0, y \leq 2\}$.

iii) $f_3 : D_3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x,y,z) = x-2y+2z$ siendo $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

iv) $f_4 : D_4 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ siendo $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

v) $f_5 : D_5 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_5(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$ siendo $D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y, y \leq 2\}$.

vi) $f_6(x,y) = -(x+1)^2 - y^2$ en $D_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.

18. Calcula la distancia mínima del punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

19. Calcula la distancia mínima entre la recta $x + y = 4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

20. Comprueba que la ecuación $x^2 + xy + y^3 - 11 = 0$ define a y como función implicita de x en un abierto del punto $x = 1$ en el cual toma el valor $y = 2$. Calcula la primera y la segunda derivada de dicha función en el punto $x = 1$.

21. Comprueba que la ecuación $\sin x + \cos y - 1 = 0$ define a y como función implicita de x en un abierto del punto $x = \frac{\pi}{2}$ en el cual toma el valor $y = \frac{\pi}{2}$. Calcula su desarrollo de Taylor de grado 3 en $x = \frac{\pi}{2}$.

22. Comprueba que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ define a z como función implicita de x e y en un abierto del punto $(6, -3)$ en el cual toma el valor $z = -2$. Obtén su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $(6, -3)$.

23. Comprueba que la ecuación $xye^z + z\cos(x^2 + y^2)$ define a z como función implicita de x e y en un abierto del punto $(0, 0)$ en el cual toma el valor $z = 0$. Obtén su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $((6, -3)$.

24. Comprueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^t + yz - z^2 = 0 \\ y\cos t + x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

define a las variables z y t como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(x, y) = (2, 1)$, con valor $(z, t) = (2, 0)$. Determinar sus derivadas parciales de primer orden en dicho punto.

25. Comprueba que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y - z^2 - t^2 = 0 \\ x^2 - y - z^2 - t = 0 \end{cases}$$

define a las variables z y t como funciones implícitas de x e y en un entorno del punto $(x, y) = (2, 1)$, con valor $(z, t) = (2, 1)$. Determinar sus derivadas parciales de primer orden en dicho punto.

26. Calcula para que puntos el teorema de la función inversa asegura la existencia de una inversa local de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (2xy, y^2 - x^2)$.

27. Calcula para que puntos el teorema de la función inversa asegura la existencia de una inversa local de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (\mathrm{e}^x \cos y, \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \sin y)$.

28. Calcula para que puntos el teorema de la función inversa asegura la existencia de una inversa local de la aplicación $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (\frac{x^2}{1-x^2-y^2}, \frac{y^2}{1-x^2-y^2})$ siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.