Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Límites y Continuidad de funciones de varias variables

1. Calcula el interior, la clausura, la frontera y el derivado de los siguientes subconjuntos del $\mathbb{R}^n$ correspondiente:

i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

ii) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

iii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$.

iv) $D = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

vi) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4\}$.

vii) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y < 0\}$.

viii) $H = [2, 3[\times] - 1, 3[$.

ix) $I = ([2, 3] \times [0, 1]) \cup \{(0, 1)\}$.

x) $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

xi) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.

xii) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4, 0 \leq z < 3\} \cup \{(-3, 0, 0)\} \cup \{(2, 0, 0)\}$.

xiii) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2, 0, 0)\} \cup \{(4, 0, 0)\}$.

xiv) $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9\} \cup \{(4, 3, 1)\}$.

2. Calcula el dominio máximo donde podrías definir las siguientes funciones:

i) $f_1(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ **ii)** $f_2(x, y) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$ **iii)** $f_3(x, y) = \log(x^2 + y^2 - 9)$

iv) $f_4(x, y) = \frac{x+y}{xy^2}$ **v)** $f_5(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ **vi)** $f_6(x, y) = (\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-1}}, \frac{3}{\sqrt{4-x^2-y^2}})$.

3. Analiza la existencia del límite en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x, y) = \frac{x+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

iv) $f_4 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

v) $f_5 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_5(x,y) = \frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$.

vi) $f_6 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_6(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

vii) $f_7 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_7(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^4}$.

viii) $f_8 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_8(x,y) = (\frac{y^2}{x^2+y^2}, x+y)$.

ix) $f_9 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_9(x,y) = (\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}))$.

x) $f_{10} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_{10}(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y^2}$.

4. Analiza la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iv) $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

v) $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_5(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

vi) $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_6(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

vii) $f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_7(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad y & \text{si } (x,y) = (0,y) \end{cases}$