Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 4.1.5: ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

PROGRAMA DETALLADO:

Producto escalar.
Normas y ángulos.
Vectores ortogonales y ortonormales. **El método de Gram-Schmidt**.
Subespacios ortogonales. **Proyección ortogonal**.
Transformaciones ortogonales. **Endomorfismos con significado geométrico**.
Diagonalización ortogonal.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

En este tema estudiaremos espacios vectoriales reales a los que les añadiremos una nueva operación, el producto escalar, que a cada par de vectores le hace corresponder un número real. También estudiaremos otros conceptos que se derivan de la introducción de esta operación, así como introduciremos algunos tipos de aplicaciones que tienen un significado geométrico. Finalizaremos viendo un tipo particular de diagonalización: la diagonalización ortogonal.

Producto escalar.

Definition *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Llamamos* ***producto escalar*** *a toda aplicación*

$$<,>: VxV \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}) \mapsto <\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}>$$

que verifica las siguientes propiedades:

$$<\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}}>=<\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}>+<\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}}>,\ \forall\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\in V.$$

$$<\alpha\cdot\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}>=\alpha<\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}>,\ \forall\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}\in V,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

$$<\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}>=<\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}>,\ \forall\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}\in V.$$

$$<\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}>\geq 0,\ \forall\vec{\mathbf{u}}\in V.$$

$$<\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}>=0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}}=\mathbf{0}.$$

En este caso, se dice que el par formado por $(V,<,>)$ es un ***espacio vectorial euclídeo****.*

Example *En $\mathbb{R}^n$, si consideramos la aplicación definida por*

$$<,>: \mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) \mapsto <(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)>:=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

se verifica que $(\mathbb{R}^n, <,>)$ *es un espacio euclídeo. Al producto escalar así definido se le llama* ***producto escalar canónico*** *de* $\mathbb{R}^n$.

Example *El producto escalar usual entre vectores del espacio* $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >= |\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}| \cos\left(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}\right)$$

también verifica las anteriores condiciones.

Example *Sea* $V = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *el conjunto (que es un espacio vectorial) de las funciones reales que son continuas en un intervalo de la forma* $[a,b]$. *Podemos entonces definir*

$$<,>: VxV \to \mathbb{R}$$

$$(f,g) \mapsto< (f,g) >:= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Puede comprobarse que esta definición cumple las anteriores propiedades de producto escalar.

Remark *Suele ser habitual, sobre todo en el caso de vectores en* $\mathbb{R}^n$*, representar al producto escalar mediante el símbolo* $\bullet$; *es decir*

$$< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >\equiv \vec{\mathbf{u}} \bullet \vec{\mathbf{v}}$$

Matriz de Gram. Expresión matricial del producto escalar.

Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ una base de V. Si denotamos por a_{ij} al producto escalar de los vectores $\vec{u_i} \cdot \vec{u_j}$, es decir

$$a_{ij} = \vec{u_i} \cdot \vec{u_j}$$

definimos:

Definition *Se llama* ***matriz de Gram*** *respecto de la base B a la matriz dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remark *Notemos que como se verifica que* $\vec{u_i} \cdot \vec{u_j} = \vec{u_j} \cdot \vec{u_i}$, *la anterior matriz siempre es simétrica.*

Example *Sea* $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$. *Calcular su matriz de Gram para el producto escalar usual.*

Example *En el espacio vectorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *(polinomios de grado menor o igual que* 2*) se considera la operación dada por*

$$< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

a) Probar que la operación anterior define un producto escalar.

b) Calcular su matriz de Gram asociada para la base usual $B = \{1, x, x^2\}$.

Normas y ángulos.

Sabemos que cuando estudiamos vectores por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, al hallar el módulo de un vector $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ y relacionarlo con el producto escalar, se llega a

$$< \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} > \equiv \vec{\mathbf{x}} \bullet \vec{\mathbf{x}} = \left(\text{módulo del vector } \vec{\mathbf{x}}\right)^2$$

Apoyándonos en esta relación (que se verifica para vectores geométricos) vamos a introducir una definición más general (y que coincidirá con la de módulo de un vector si la particularizamos a $\mathbb{R}^n$):

Definition *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se llama **norma del vector** **x** al número real dado por*

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| := \sqrt{< \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} >}$$

Se verifican las siguientes propiedades para la norma de un vector:

Proposition *Sean* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in V$*. Entonces:*

a) $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.

b) $\|\alpha \cdot \vec{\mathbf{x}}\| = \alpha\|\vec{\mathbf{x}}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

c) $\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{y}}\|^2 = 2\left(\|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2\right)$

d) $\left|< \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} >\right| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\|\|\vec{\mathbf{y}}\|$.

e) $\|\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{y}}\| \leq \|\vec{\mathbf{x}}\| + \|\vec{\mathbf{y}}\|$.

Definition *Se dice que un vector* $\vec{\mathbf{x}} \in V$ *es **unitario** si* $\|\vec{\mathbf{x}}\| = 1$*. De esta forma, si* $\vec{\mathbf{x}} \in V$ *es un vector cualquiera no nulo, siempre es posible obtener un vector unitario en su misma dirección. Para ello basta con tomar* $\frac{\vec{\mathbf{x}}}{\|\vec{\mathbf{x}}\|}$.

Example *En* $\mathbb{R}^n$ *si se considera el producto escalar canónico, la norma de un vector* $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_n)$ *viene dada por*

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| := \sqrt{< \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{x}} >} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Example *En* $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$*, la norma de un vector* $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ *viene dada por*

$$\|f\| := \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$$

Definition *Sean* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in V$*. Entonces se define la* ***distancia*** *de* $\vec{\mathbf{x}}$ *a* $\vec{\mathbf{y}}$ *como* $\mathbf{d}\left(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\right) := \|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}\|$ *o* $\|\vec{\mathbf{y}} - \vec{\mathbf{x}}\|$*. Se prueba que esta distancia así definida cumple con todas las propiedades de "distancia" (ver tema introductorio al Cálculo Infinitesimal en varias variables), por lo que todo espacio vectorial euclídeo es, en particular, un espacio métrico.*

Definition *Sean* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in V$ *dos vectores no nulos. Se define el* ***ángulo*** *entre* $\vec{\mathbf{x}}$ *e* $\vec{\mathbf{y}}$ *como*

$$\theta = \arccos \frac{< \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} >}{\|\vec{\mathbf{x}}\| \, \|\vec{\mathbf{y}}\|}$$

Remark *De la anterior definición resulta que*

$$< \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} >= \|\vec{\mathbf{x}}\| \, \|\vec{\mathbf{y}}\| \cdot \cos\theta$$

Vectores ortogonales y ortonormales. El método de Gram-Schmidt.

Definition *Dos vectores* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in V$ *de un espacio vectorial euclídeo son* ***ortogonales*** *si* $< \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} >= 0$*. Suelen representarse por* $\vec{\mathbf{x}} \perp \vec{\mathbf{y}}$*.*

Remark *Si dos vectores no nulos son ortogonales, éstos forman un ángulo recto, ya que* $< \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} >= 0$ *equivale a* $\cos\left(\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}\right) = 0$*.*

Proposition *Si* $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ *son ortogonales, se verifica el siguiente resultado (conocido como* ***teorema de Pitágoras****):*

$$\|\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{x}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{y}}\|^2$$

Definition *Si* $U = \left\{\vec{\mathbf{x}_1}, \ldots, \vec{\mathbf{x}_p}\right\}$ *es un subespacio vectorial de V, se dice que U es un* ***sistema ortogonal*** *de V si los vectores que lo forman son ortogonales dos a dos.*

Definition *Si* $B = \left\{\vec{\mathbf{e}_1}, \ldots, \vec{\mathbf{e}_r}\right\}$ *es una base de V, diremos que B es una* ***base ortonormal*** *si es un sistema ortogonal y los vectores que la componen son unitarios.*

A continuación presentamos el método de Gram-Schmidt, que nos permitirá obtener una base ortonormal a partir de una base cualquiera de un espacio vectorial V :

El método de Gram-Schmidt.

Proposition ***(Método de Gram-Schmidt)*** *Sea* $B = \left\{\vec{\mathbf{e}_1}, \ldots, \vec{\mathbf{e}_n}\right\}$ *una base de un espacio vectorial euclídeo V. Definimos un nuevo conjunto de vectores de V de la forma siguiente:*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{u}_1} &= \overrightarrow{\mathbf{e}_1}\\
\overrightarrow{\mathbf{u}_2} &= \overrightarrow{\mathbf{e}_2} - \frac{<\overrightarrow{\mathbf{u}_1},\overrightarrow{\mathbf{e}_2}>}{<\overrightarrow{\mathbf{u}_1},\overrightarrow{\mathbf{u}_1}>}\overrightarrow{\mathbf{u}_1}\\
\overrightarrow{\mathbf{u}_3} &= \overrightarrow{\mathbf{e}_3} - \frac{<\overrightarrow{\mathbf{u}_1},\overrightarrow{\mathbf{e}_3}>}{<\overrightarrow{\mathbf{u}_1},\overrightarrow{\mathbf{u}_1}>}\overrightarrow{\mathbf{u}_1} - \frac{<\overrightarrow{\mathbf{u}_2},\overrightarrow{\mathbf{e}_3}>}{<\overrightarrow{\mathbf{u}_2},\overrightarrow{\mathbf{u}_2}>}\overrightarrow{\mathbf{u}_2}\\
&\cdots\\
\overrightarrow{\mathbf{u}_n} &= \overrightarrow{\mathbf{e}_n} - \frac{<\overrightarrow{\mathbf{u}_1},\overrightarrow{\mathbf{e}_n}>}{<\overrightarrow{\mathbf{u}_1},\overrightarrow{\mathbf{u}_1}>}\overrightarrow{\mathbf{u}_1} - \cdots - \frac{<\overrightarrow{\mathbf{u}_{n-1}},\overrightarrow{\mathbf{e}_n}>}{<\overrightarrow{\mathbf{u}_{n-1}},\overrightarrow{\mathbf{u}_{n-1}}>}\overrightarrow{\mathbf{u}_{n-1}}
\end{aligned}$$

Entonces $U = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}_1},\ldots,\overrightarrow{\mathbf{u}_n}\right\}$ *es una base ortogonal, de manera que*

$$\left\{\frac{\overrightarrow{\mathbf{u}_1}}{\|\overrightarrow{\mathbf{u}_1}\|},\ldots,\frac{\overrightarrow{\mathbf{u}_n}}{\|\overrightarrow{\mathbf{u}_n}\|}\right\}$$

será una base ortonormal.

Example *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^4$ *con el producto escalar usual se pide:*

a) Determinar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $(1,2,1,0),(0,-1,1,0)$ *y* $(1,1,-2,1)$.

b) Obtener, mediante el método anterior, una base de vectores ortonormales para el subespacio

$$S =< (1,2,-1,0),(0,1,1,0),(1,0,-2,1) >$$

Example *Obtener, para el producto escalar canónico, una base ortonormal para los siguientes subespacios vectoriales:*

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = 0\}\\
S_2 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}\\
S_3 &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y = 0,\ z+2t = 0\right\}
\end{aligned}$$

Subespacios ortogonales. Proyección ortogonal.

Definition *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Entonces:*

- Si $\vec{\mathbf{v}} \in V$ *y S es un subespacio vectorial de V, se dice que* **v** *es* ***ortogonal*** *a S si* $<\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}>= 0,\ \forall\vec{\mathbf{w}}\in S$. *Se demuestra que para probar que un vector* **v** *es ortogonal a S si lo es a los vectores de una base de S.*

- Si S y T son subespacios de V, se dice que S y T son ***ortogonales*** *si* $<\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}>= 0,\ \forall\vec{\mathbf{v}}\in S$ *y* $\forall\vec{\mathbf{w}}\in T$. *Se demuestra que lo anterior ocurre sí y sólo si cualquier base de S es ortogonal a cualquier base de T.*

Definition *- Si S es un subespacio vectorial de V, se define el s**ubespacio ortogonal** de S como el conjunto*

$$S^{\perp} = \left\{\vec{\mathbf{v}} \in V \mid <\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}>= 0,\ \forall\vec{\mathbf{w}}\in S\right\}$$

Proposition *Si S es un subespacio vectorial de V, entonces:*

a) $S \cap S^{\perp} = 0$

b) $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

c) $V^{\perp} = 0$ *y* $0^{\perp} = V$.

d) Si V es finitamente generado, entonces $V = S \oplus S^{\perp}$.

Example *En* $\mathbb{R}^4$ *con el producto escalar usual, obtener el subespacio ortogonal suplementario de*

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t = 0,\ 2x+y-z+3t = 0\}$$

Del último de los resultados anteriores se deduce que si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, cualquier vector $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar como $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}$, con $\vec{\mathbf{v}} \in S$ y $\vec{\mathbf{w}} \in S^{\perp}$. Así, se define la **proyección ortogonal de** $\vec{\mathbf{v}}$ **en** S como el vector $\vec{\mathbf{v}} \in S$, es decir, $P_S(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{v}}$. Por tanto, $\vec{\mathbf{x}} - P_S(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{w}} \in S^{\perp}$.

Example *Hallar la proyección ortogonal del vector* $(1,2,1)$ *sobre el subespacio*

$$S =< (0,1,2),(1,2,3) >$$

Example *Idem para el vector* $(7,1,-6,9)$ *sobre el subespacio*

$$S =< (1,-2,0,0),(0,1,2,1),(-1,0,1,1) >$$

Definition *Si* $\vec{\mathbf{v}} \in V$ *y S es un subespacio vectorial de V, se define la* ***distancia*** *de* $\vec{\mathbf{v}}$ *a S como*

$$d(\vec{\mathbf{v}},S) = \inf\{d(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}}) \mid \vec{\mathbf{w}} \in S\}$$

Remark *Se verifica que* $d(\vec{\mathbf{v}},S) = d(\vec{\mathbf{v}},P_S(\vec{\mathbf{x}}))$*, lo que quiere decir que el vector* $P_S(\vec{\mathbf{x}})$ *es el más próximo a* $\vec{\mathbf{v}}$ *de todos los vectores de S.*

Example *En* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual, obtener la proyección ortogonal del subespacio*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\}$$

y calcular a partir de esta proyección la distancia de S a los vectores $(1,1)$, $(1,-1)$ *y* $(2,0)$.

Example *En* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual, se considera el subespacio*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$$

a) Calcular su subespacio ortogonal.

b) Obtener la proyección ortogonal y la distancia de vector $(2,-1,0)$ *a S.*

c) Calcular la proyección ortogonal y la simetría de base el subespacio S. (Antes de hacer este último apartado es preciso ver la sección de teoría siguiente).

Transformaciones ortogonales. Endomorfismos con significado geométrico.

Volvemos ahora a las aplicaciones lineales, y les vamos a incorporar el producto escalar. Así, queremos ocuparnos de las aplicaciones lineales que "funcionan bien" en su relación con las longitudes y los ángulos, es decir, que son "compatibles" con la estructura euclídea que se añade a los espacios vectoriales. Como veremos, esta compatibilidad radica en la conservación del producto escalar; es decir, el producto escalar de dos vectores es igual al producto escalar de sus imágenes.

Estas aplicaciones, que llamaremos ortogonales, no son muy novedosas. De hecho, en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, estas transformaciones son los movimientos en el plano o en el espacio ordinario; estos movimientos convierten cualquier figura en otra que es igual a aquella (tiene misma forma y mismo tamaño).

Definition *Una aplicación lineal* $f : V \to W$ *entre dos espacios vectoriales euclídeos es una* ***aplicación ortogonal*** *si conserva el producto escalar, es decir si cumple*

$$< f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) > = < \mathbf{u}, \mathbf{v} >, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

Proposition *Una aplicación ortogonal f verifica:*

a) Conserva las normas, es decir $\|f(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|, \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}$.

b) Conserva los ángulos, es decir $\operatorname{ang}(f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})) = \operatorname{ang}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

c) f es inyectiva.

Definition *Llamaremos* ***transformación ortogonal*** *a toda aplicación ortogonal entre el mismo espacio vectorial euclídeo V; es decir, a toda* $f : V \to V$ *ortogonal.*

A continuación nos centraremos en el estudio de determinadas transformaciones ortogonales:

Definition *Se dice que una transformación ortogonal* $f : V \to V$ *es una* ***homotecia de razón*** $\alpha \in \mathbb{R}$ *si* $f(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{v}$. *Claramente, para toda base B de V se tiene que la matriz asociada a f en dicha base viene dada por* $M_B(f) = \alpha\mathbb{I}$.

Definition *Sean S y T dos subespacios de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $S \oplus T = \mathbb{R}^n$. *Se define la* ***proyección de base** S* ***y dirección*** *T como el endomorfismo* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $P(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in S$ *y* $P(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{u} \in T$. *Claramente, si B es una base de* $\mathbb{R}^n$ *resultante de unir una base de S con una base de T, entonces*

$$M_B(P) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{rx(n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r)xr} & \mathbb{O}_{(n-r)x(n-r)} \end{pmatrix}$$

*siendo r la dimensión de S. En el caso particular en el que $T = S^{\perp}$, a la aplicación anterior se le llama **proyección ortogonal** de base S.*

Definition *Sean S y T dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ tales que $S \oplus T = \mathbb{R}^n$. Se define la **simetría de base** S **y dirección** T como el endomorfismo $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $G(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in S$ y $G(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in T$. Claramente, si B es una base de $\mathbb{R}^n$ resultante de unir una base de S con una base de T, entonces*

$$M_B(P) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{rx(n-r)} \\ \mathbb{O}_{(n-r)xr} & -\mathbb{I}_{(n-r)x(n-r)} \end{pmatrix}$$

*siendo r la dimensión de S. En el caso particular en el que $T = S^{\perp}$, a la aplicación anterior se le llama **simetría ortogonal** de base S.*

Definition *Si $\theta \in [0, 2\pi]$, se dice que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una rotación de ángulo θ si existe una base B tal que*

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Example *Resolver el último apartado del ejemplo anterior.*

Example *Dado el subespacio de $\mathbb{R}^3$*

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0,\ x + y = 0\right\}$$

calcular la simetría ortogonal de base S.

Example *En $\mathbb{R}^3$, calcular la homotecia de razón $\alpha = -2$ y su matriz con respecto a la base canónica.*

Example *En $\mathbb{R}^2$ calcular el giro de ángulo $\theta = \frac{3\pi}{4}$.*

Diagonalización ortogonal.

Recordamos que se dice que una matriz cuadrada P es **ortogonal**, si $PP^T = P^TP = \mathbb{I}$, o lo que es lo mismo, si $P^{-1} = P^T$. Entonces:

Definition *Dos matrices cuadradas A y C son **ortogonalmente semejantes** si existe una matriz ortogonal P tal que $C = P^{-1}AP = P^TAP$.*

Definition *Una matriz cuadrada A se dice que es **diagonalizable ortogonalmente** si es* *ortogonalmente semejante a una matriz diagonal, es decir, si existe P ortogonal tal que $P^{-1}AP = P^T AP =$ Diagonal.*

Proposition *Se verifican:*

a) Si A es una matriz real cuadrada simétrica (y por tanto diagonalizable) y consideramos en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar canónico, entonces los subespacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

b) Si B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar canónico y P es la matriz cuyos vectores columna son los vectores de B, entonces P es ortogonal.

c) Toda matriz real simétrica es diagonalizable ortogonalmente.

Example *Probar que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable ortogonalmente, y hallar su matriz de paso P ortogonal.

Ejercicios resueltos.

1. (1er parcial, Febrero 2012) *En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar definido por*

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = 2xx' + 3yy' + zz'$$

Con esta definición, se pide:

1.a *Hallar una base ortonormal del subespacio $W = \langle (1,2,-1),(0,-1,1) \rangle$ y otra para $W^{\perp}$.*

1.b *Determinar la proyección ortogonal del vector $(-1,2,-2)$ sobre $U = \{(x,y,z) \ : \ x-y+2z = 0\}$.*

Solución:

(1.a) Hallaremos en primer lugar una base ortogonal para W (por método de G-S):

$$u_1 = e_1 = (1,2,-1)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \cdot e_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 = (0,-1,1) - \frac{-7}{15}(1,2,-1) = \left(\frac{7}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{8}{15}\right)$$

donde se ha tenido en cuenta que $u_1 \cdot e_2 = (1,2,-1) \cdot (0,-1,1) = -7$ y que $u_1 \cdot u_1 = 15$. Por tanto, la base ortonormal para W será la dada por $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}\right\}$, donde

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1 \cdot u_1} = \sqrt{15}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2 \cdot u_2} = \frac{\sqrt{165}}{15}$$

Veamos como hallar una base para $W^{\perp}$: Si $(x,y,z) \in W^{\perp}$, ha de ser

$$\begin{cases} (x,y,z) \cdot (1,2,-1) = 0 \\ (x,y,z) \cdot (0,-1,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}$$

por lo que $W^{\perp} = \langle (2y,y,2y) \rangle = \langle (2,1,2) \rangle$ y solo hemos de dividir este vector por su módulo (que vale $\sqrt{15}$) para tener la base buscada.

(1.b) Se trata de poner $(-1,2,-2) = u + v$, donde $u \in U$ y $v \in U^{\perp}$, siendo el valor del vector u la proyección pedida. Al ser $u \in U = \{(x,y,z)\ :\ x - y + 2z = 0\} =< (1,1,0),(0,2,1) >$ y $v \in U^{\perp}$, se tiene

$$(-1,2,-2) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,1) + v$$

por lo que para hallar α y β multiplicaremos escalarmente (usando el producto escalar definido en el enunciado) por los vectores de U :

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1,2,-2) \cdot (1,1,0) = \alpha(1,1,0) \cdot (1,1,0) + \beta(0,2,1) \cdot (1,1,0) + v \cdot (1,1,0) \\ (-1,2,-2) \cdot (0,2,1) = \alpha(1,1,0) \cdot (0,2,1) + \beta(0,2,1) \cdot (0,2,1) + v \cdot (0,2,1) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 4 = 5\alpha + 6\beta + 0 \\ 10 = 6\alpha + 13\beta + 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \\ \beta = \end{array} \right.$$

por lo que la proyección pedida es

$$u = \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,1) =$$

2. (1er parcial, Febrero 2013) *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la aplicación bilineal definida por*

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = xx' + 2yy' + zz'$$

Con esta definición, se pide:

2.a *Probar que esta aplicación define un producto escalar.*

2.b *Hallar una base ortonormal de los subespacios U y W, siendo*

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y - z = 0,\ 2x - z = 0\}$$

$$W =< (1,2,-1),(0,1,1) >$$

2.c *Hallar una base del subespacio ortogonal a cada uno de ellos.*

2.d *Determinar la proyección ortogonal del vector* $(2,3,-2)$ *sobre U.*

Solución:

(2.a) Hemos de ver que se verifican las 5 propiedades de la definición de producto escalar:

$$< \vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}} >=< \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}} > + < \vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}} >, \forall \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}} \in V.$$

$$< \alpha \cdot \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}} >= \alpha < \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}} >, \forall \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$< \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}} >=< \vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}} >, \forall \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}} \in V.$$

$$< \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}} >\geq 0, \forall \vec{\mathbf{u}} \in V.$$

$$< \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}} >= 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}}= \mathbf{0}.$$

- $< \vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}} >=< \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}} > + < \vec{\mathbf{w}},\vec{\mathbf{v}} >$: En nuestra terminología, se trata de probar que

$$((x,y,z) + (x',y',z')) \cdot (x'',y'',z'') = (x,y,z) \cdot (x'',y'',z'') + (x',y',z') \cdot (x'',y'',z'')$$

(notemos que al producto escalar lo representamos indistintamente por $(x,y,z) \cdot (x',y',z')$ o por $< (x,y,z),(x',y',z') >$. Pero esta propiedad es inmediata, ya que el término de la izda de la anterior igualdad será

$$\begin{aligned} ((x,y,z) + (x',y',z')) \cdot (x'',y'',z'') &= (x+x',y+y',z+z') \cdot (x'',y'',z'') = \\ &= (x+x')x'' + 2(y+y')y'' + (z+z')z'' \end{aligned}$$

mientras que el término de la derecha será

$$(x,y,z)\bullet(x'',y'',z'')+(x',y',z')\bullet(x'',y'',z'') = xx''+2yy''+zz''+x'x''+2y'y''+z'z''$$

y evidentemente ambos resultados coinciden.

- Por ejemplo, si queremos probar la última $<\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{u}}>=0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{u}}=\mathbf{0}$, tendremos que ver que

$$(x,y,z)\bullet(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

pero esto es inmediato, ya que el miembro de la izda es

$$(x,y,z)\bullet(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x^2+2y^2+z^2 = 0$$

y la única posibilidad de que esta suma de términos positivos sea 0 es que $(x,y,z) = (0,0,0)$).

- El resto de las propiedades se demuestran de forma análoga.

(2.b) Hallaremos en primer lugar una base para U y otra para W :
Resolviendo el sistema que aparece en U tenemos que $z = 2x$, $y = x$, por lo que

$$U = \{(x,x,2x)\} =< (1,1,2) >$$

mientras que para W se tiene que

$$W =< (1,2,-1),(0,1,1) >$$

Ahora hemos de transformar estas bases en otras que sean ortonormales, para lo que aplicaremos el método de G-S):

Una base ortonormal para U es inmediata, ya que al tener U un único vector, sólo hemos de dividir por su módulo, de manera que al ser

$$\|(1,1,2)\| = \sqrt{(1,1,2)\bullet(1,1,2)} = \sqrt{7}$$

donde se ha tenido en cuenta la definición que nos dan de producto escalar para calcular el módulo (ojo: no hay que usar el producto escalar canónico, sino el producto escalar que nos da el enunciado; y ésto hay que hacerlo en todo el ejercicio)

$$U = \frac{1}{\sqrt{7}} < (1,1,2) >$$

es base ortonormal para U.

Para W :

$$u_1 = e_1 = (1,2,-1)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1\bullet e_2}{u_1\bullet u_1}u_1 = (0,1,1) - \frac{(1,2,-1)\bullet(0,1,1)}{(1,2,-1)\bullet(1,2,-1)}(1,2,-1) =$$

$$= (0,1,1) - \frac{3}{10}(1,2,-1) = \left(-\frac{3}{10},\frac{2}{5},\frac{13}{10}\right)$$

Por tanto, la base ortonormal para W será la dada por $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|},\frac{u_2}{\|u_2\|}\right\}$, donde

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1\bullet u_1} = \sqrt{10}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2\bullet u_2} = \frac{\sqrt{210}}{10}$$

donde de nuevo estos productos escalares se han obtenido usando el producto escalar dado en el enunciado.

(2.c) En este caso nos piden bases para $U^{\perp}$ y para $W^{\perp}$:

- Si $(x,y,z) \in U^{\perp}$, ha de ser
$$(x,y,z) \cdot (1,1,2) = 0 \Rightarrow x + 2y + 2z = 0$$
por lo que la base del subespacio ortogonal será
$$U^{\perp} = \{(-2y - 2z, y, z)\} =< (-2,1,0), (-2,0,1) >$$
- Si $(x,y,z) \in W^{\perp}$, ha de ser
$$\begin{cases} (x,y,z) \cdot (1,2,-1) = 0 \\ (x,y,z) \cdot (0,1,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6y \\ z = -2y \end{cases}$$
por lo que
$$W^{\perp} =< (-6y, y, -2y) >=< (-6,1,-2) >$$

(2.d) Se trata de poner $(2,3,-2) = u + v$, donde $u \in U$ y $v \in U^{\perp}$, siendo el valor del vector u la proyección pedida. Al ser $u \in U =< (1,1,2) >$ y $v \in U^{\perp} =< (-2,1,0), (-2,0,1) >$, se tiene
$$(2,3,-2) = \alpha(1,1,2) + \beta(-2,1,0) + \gamma(-2,0,1)$$
por lo que para hallar α multiplicaremos escalarmente (usando el producto escalar definido en el enunciado) por el vector de U :
$$(2,3,-2) \cdot (1,1,2) = \alpha(1,1,2) \cdot (1,1,2) + \beta(-2,1,0) \cdot (1,1,2) + \gamma(-2,0,1) \cdot (1,1,2)$$
de donde
$$4 = 7\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4}{7}$$
por lo que la proyección pedida es
$$u = \alpha(1,1,2) = \frac{4}{7}(1,1,2)$$

3. (1er parcial, Febrero 2014) *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera el producto escalar definido por*
$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = xx' + 5yy' + 2zz'$$
y los subespacios vectoriales
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + y = 0\right\} \quad \text{y} \quad W =< (1,-1,0) >$$
Con esta definición, se pide:
3.a *Dada la base canónica de* $\mathbb{R}^3$*, hallar una base ortonormal.*
3.b *Calcular una base ortonormal de los subespacios* $U^{\perp}$ *y* $W^{\perp}$*.*
3.c *Calcular* $U \cap W$ *y* $U^{\perp} + W^{\perp}$*.*
3.d *Determinar la proyección ortogonal del vector* $(1,2,1)$ *sobre U.*

Solución:

(3.a) Con el nuevo producto escalar que nos dan, está claro que los 3 vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales (el producto escalar de dos cualesquiera de ellos, usando el producto escalar del enunciado, siempre da 0). Lo único que necesitamos es de asegurarnos si los vectores son unitarios:
$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{(1,0,0) \cdot (1,0,0)} = 1$$
$$\|(0,1,0)\| = \sqrt{(0,1,0) \cdot (0,1,0)} = \sqrt{5}$$
$$\|(0,0,1)\| = \sqrt{(0,0,1) \cdot (0,0,1)} = \sqrt{2}$$
Por tanto, la base ortonormal pedida será

$$\left\{(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1)\right\}$$

(3.b) Se tiene que

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x+y=0\right\} = \{(x,-2x,z)\} =< (1,-2,0),(0,0,1) >$$

por lo que

$$(x,y,z) \in U^{\perp} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \cdot (1,-2,0) = 0 \\ (x,y,z) \cdot (0,0,1) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 10y = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right.$$

de donde

$$U^{\perp} = \{(10y,y,0)\} =< (10,1,0) >$$

mientras que

$$(x,y,z) \in W^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z) \cdot (1,-1,0) = 0 \Leftrightarrow x - 5y = 0$$

de donde

$$W^{\perp} = \{(5y,y,z)\} =< (5,1,0),(0,0,1) >$$

De esta forma, una base ortonormal para $U^{\perp}$ viene dada por

$$U^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{105}} < (10,1,0) >$$

(puesto que el módulo del vector $(10,1,0)$ es $\|(10,1,0)\| = \sqrt{(10,1,0)\cdot(10,1,0)} = \sqrt{105}$), mientras que para hallar la base ortonormal de $W^{\perp}$ tendremos que usar las 2 primeras ecuaciones del método de Gram-Schmitd:

$$u_1 = e_1 = (5,1,0)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \cdot e_2}{u_1 \cdot u_1}u_1 = (0,0,1) - \frac{(5,1,0)\cdot(0,0,1)}{(5,1,0)\cdot(5,1,0)}(5,1,0) = (0,0,1)$$

Notemos que se obtienen los dos mismos vectores de $W^{\perp}$ (Nota: No sería preciso usar las ecuaciones del método de G-S si observamos desde el principio que los dos vectores de la base de $W^{\perp}$ ya son ortogonales - inclusive con el producto escalar definido en el enunciado). Por tanto, para hallar la base ortonormal de $W^{\perp}$ solo hemos de dividir cada vector por su módulo:

$$\|(5,1,0)\| = \sqrt{(5,1,0)\cdot(5,1,0)} = \sqrt{30}$$

$$\|(0,0,1)\| = \sqrt{(0,0,1)\cdot(0,0,1)} = 1$$

y la base ortonormal sería

$$W^{\perp} =< \frac{1}{\sqrt{30}}(5,1,0),(0,0,1) >$$

(3.c) Se tiene que

$$(x,y,z) \in U \cap W \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \in U \\ (x,y,z) \in W \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) = \alpha(1,-2,0) + \beta(0,0,1) \\ (x,y,z) = \gamma(1,-1,0) \end{array} \right.$$

y resolviendo este sistema se tendría que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por lo que $U \cap W = \{(0,0,0)\}$.

De forma análoga podemos actuar para hallar $U^{\perp} + W^{\perp}$: Sabemos que $U^{\perp} + W^{\perp} =< (10,1,0),(5,1,0),(0,0,1) >$, y puesto que estos 3 vectores son lin. independientes, resulta que $U^{\perp} + W^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

(3.d) Se trata de expresar $(1,2,1) = u + w$, con $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$. Así, será

$$(1,2,1) = u + w = \alpha(1,-2,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(10,1,0)$$

y para determinar estos coeficientes multiplicaremos escalarmente esta igualdad por los vectores de U (para lo que usaremos la definición de producto escalar dada en el enunciado):

$$(1,2,1) \bullet (1,-2,0) = \alpha(1,-2,0) \bullet (1,-2,0) + \beta(0,0,1) \bullet (1,-2,0) + \gamma(10,1,0) \bullet (1,-2,0)$$
$$(1,2,1) \bullet (0,0,1) = \alpha(1,-2,0) \bullet (0,0,1) + \beta(0,0,1) \bullet (0,0,1) + \gamma(10,1,0) \bullet (0,0,1)$$

de donde

$$-19 = 21\alpha$$
$$2 = 2\beta$$

Por lo tanto la proyección ortogonal pedida será

$$u = \alpha(1,-2,0) + \beta(0,0,1) = \frac{-19}{21}(1,-2,0) + 1(0,0,1) = \left(-\tfrac{19}{21},\ \ \tfrac{38}{21},\ \ 1 \right)$$

4. (1er parcial, Febrero 2015) *En* $\mathbb{R}^3$ *se consideran los subespacios vectoriales*

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\right\}, \qquad B =< (-2,0,1),(0,-4,3) >$$
$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 3y - 2z = 0\right\}$$

Usando el producto escalar usual, se pide:

4.a *Hallar una base ortonormal de* A.
4.b *Hallar una base para* $A \cap B$ *y otra para* $A + C$.
4.c *Determinar* $A^{\perp}$, *subespacio ortogonal de* A.
4.d *Hallar los valores de* a *para los que* $(2,1,a) \in A \cap C$.
4.e *Determinar la proyección ortogonal del vector* $(-1,-3,2)$ *sobre* C.

Solución:

(4.a) Tenemos que $A = \{(x,y,-x-2y)\} =< (1,0,-1),(0,1,-2) >$, por lo que si aplicamos el método de G-S:

$$\begin{cases} u_1 = e_1 = (1,0,-1) \\ u_2 = e_2 - \frac{u_1 \bullet e_2}{u_1 \bullet u_1} u_1 = (0,1,-2) - \frac{2}{2}(1,0,-1) = (-1,1,-1) \end{cases}$$

y la base ortonormal será

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1) \right\}$$

(4.b) Tenemos que

$$A =< (1,0,-1),(0,1,-2) >,\ C = \{(-3y+2z,y,z)\} =< (-3,1,0),(2,0,1) >$$

por lo que

$$A + C =< (1,0,-1),(0,1,-2),(-3,1,0),(2,0,1) >=< (1,0,-1),(0,1,-2),(-3,1,0) >$$

Así, $\dim(A+C) = 3$, por lo que $A + C = \mathbb{R}^3$.

Para $A \cap B$:

$$\text{Si } (x,y,z) \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-2) \\ (x,y,z) = \gamma(-2,0,1) + \delta(0,-4,3) \end{cases}$$

y resolviendo este sistema, obtenemos que $\alpha = 10\delta,\ \beta = -4\delta,$ por lo que sustituyendo resulta que

$$A \cap B = \{(10\delta,-4\delta,-2\delta)\} =< (10,-4,-2) >$$

NOTA: Otra forma de obtener esta intersección, y teniendo en cuenta que A y B son planos, es hallar el vector director de la recta dada por la intersección de ambos planos (y que puede hallarse a través del producto vectorial de los dos vectores normales de los planos).

(4.c) Se verifica que

$$(x,y,z) \in A^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z) \bullet (1,0,-1) = (x,y,z) \bullet (0,1,-2) = 0$$

de donde resulta

$$A^{\perp} = \{(z,2z,z)\} =< (1,2,1) >$$

(4.d) De forma análoga a (3.b), resulta que

$$A \cap C =< (10,-4,-2) >$$

por lo que es imposible que ningún vector de la forma $(2,1,a)$ esté en $A \cap C$.

(4.e) Se trata de poner

$$(-1,-3,2) = u + v, \text{ siendo } u \in C \text{ y } v \in C^{\perp}$$

y la proyección ortogonal pedida es el vector u.

Entonces

$$(-1,-3,2) = u + v = \alpha(-3,1,0) + \beta(2,0,1) + v$$

y si multiplicamos escalarmente esta igualdad por los vectores de C, tendremos

$$(-1,-3,2) \bullet (-3,1,0) = \alpha(-3,1,0) \bullet (-3,1,0) + \beta(2,0,1) \bullet (-3,1,0) + v \bullet (-3,1,0)$$
$$(-1,-3,2) \bullet (2,0,1) = \alpha(-3,1,0) \bullet (2,0,1) + \beta(2,0,1) \bullet (2,0,1) + v \bullet (2,0,1)$$

(notemos que los últimos sumandos de las expresiones anteriores son nulos, ya que $v \in C^{\perp}$), es decir

$$\begin{cases} 0 = 10\alpha - 6\beta \\ 0 = -6\alpha + 4\beta \end{cases}$$

de donde $\alpha = \beta = 0$, y la proyección pedida es $u = \alpha(-3,1,0) + \beta(2,0,1) = (0,0,0)$.

NOTA: El resultado es lógico, ya que si obtenemos $C^{\perp}$ (que no ha sido preciso para resolver este apartado), resulta ser $C^{\perp} =< (1,3,-2) >$, por lo que el vector al que vamos a calcular su proyección ortogonal está en este subespacio. Por tanto, su proyección ortogonal sobre C ha de ser el vector nulo.

5. (1er parcial, Febrero 2016) *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$ *se considera el producto escalar*

definido por

$$(x,y,z,t) \bullet (x',y',z',t') = xx' + yy' + zz' + 2tt'$$

y el subespacio dado por $S =< (1,0,-1,0),(0,2,3,1) >$. *Se pide:*

5.a *Obtener una base ortonormal para* $S^{\perp}$.

5.b *Expresar el vector* $(3,0,3,0)$ *como suma de un vector de* S *y otro de* $S^{\perp}$.

Solución:

(5.a) En primer lugar hallamos una base para $S^{\perp}$:

$$(x,y,z,t) \in S^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z,t) \bullet (1,0,-1,0) = 0 \\ (x,y,z,t) \bullet (0,2,3,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 2y + 3z + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = x;\ t = \frac{-2y-3x}{2}$$

por lo que

$$S^{\perp} = \left\{\left(x,y,x,\frac{-2y-3x}{2}\right)\right\} =< (1,0,1,-3/2),(0,1,0,-1) >$$

Aplicaremos a estos dos vectores las ecuaciones del método de ortogonalización de G-S:

$$u_1 = e_1 = (1,0,-1,-3/2)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \bullet e_2}{u_1 \bullet u_1}u_1 = (0,1,0,-1) - \frac{(1,0,-1,-3/2) \bullet (0,1,0,-1)}{(1,0,-1,-3/2) \bullet (1,0,-1,-3/2)}(1,0,-1,-3/2) =$$

$$= (0,1,0,-1) - \frac{3}{13/2}(1,0,-1,-3/2) = (-6/13,1,6/13,-4/13)$$

Ahora solo hemos de dividir cada vector por su módulo para obtener la base ortonormal: Como

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1 \bullet u_1} = \sqrt{(1,0,-1,-3/2) \bullet (1,0,-1,-3/2)} = \sqrt{13/2}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2 \bullet u_2} = \sqrt{(-6/13,1,6/13,-4/13) \bullet (-6/13,1,6/13,-4/13)} = \sqrt{\frac{257}{169}} = \frac{\sqrt{257}}{13}$$

la base ortonormal viene dada por

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{13}}(1,0,-1,-3/2), \frac{13}{\sqrt{257}}(-6/13,1,6/13,-4/13)\right\}$$

(5.b) Si se considera $u \in S$ y $v \in S^{\perp}$, se trata de poner

$$(3,0,3,0) = u + v = \alpha(1,0,-1,0) + \beta(0,2,3,1) + \gamma(1,0,1,-3/2) + \delta(0,1,0,-1)$$

Los coeficientes los obtendremos multiplicando escalarmente esta igualdad por los dos vectores de la base de S y por los dos vectores de la base de $S^{\perp}$: En primer lugar multiplicamos por los de S

$$(3,0,3,0) \bullet (1,0,-1,0) = \alpha(1,0,-1,0) \bullet (1,0,-1,0) + \beta(0,2,3,1) \bullet (1,0,-1,0) +$$
$$+ \gamma(1,0,1,-3/2) \bullet (1,0,-1,0) + \delta(0,1,0,-1) \bullet (1,0,-1,0)$$

es decir

$$0 = 2\alpha - 3\beta$$

mientras que

$$(3,0,3,0) \bullet (0,2,3,1) = \alpha(1,0,-1,0) \bullet (0,2,3,1) + \beta(0,2,3,1) \bullet (0,2,3,1) + \\ + \gamma(1,0,1,-3/2) \bullet (0,2,3,1) + \delta(0,1,0,-1) \bullet (0,2,3,1)$$

por lo que

$$9 = -3\alpha + 15\beta$$

Si multiplicamos por los dos vectores de $S^{\perp}$ y operando, se llega a

$$6 = \frac{13}{2}\gamma + 3\delta;\ 0 = 3\gamma + 3\delta$$

Resolviendo entonces estos sistemas, tendremos que

$$\alpha = 9/7;\ \beta = 6/7;\ \gamma = 12/7;\ \delta = -12/7$$

por lo que

$$u = 9/7(1,0,-1,0) + 6/7(0,2,3,1) = (9/7,12/7,9/7,6/7)$$
$$v = 12/7(1,0,1,-3/2) - 12/7(0,1,0,-1) = (12/7,-12/7,12/7,-6/7)$$

Ejercicios propuestos.

1. Para los siguientes definiciones de productos, ver cuales son productos escalares:
   a. En $\mathbb{R}^2$
   $$(x,y) \cdot (x',y') = xx' + 3yy' - xy' - 2yx'$$
   b. En $\mathbb{R}^2$
   $$(x,y) \cdot (x',y') = xx' + xy' + yx'$$
   c. En $\mathbb{R}^3$
   $$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = xx' + 2yy' + 4zz' + xy' + yx'$$
   d. En $\mathbb{R}^2$, dada una matriz cuadrada M de orden 2
   $$(x,y) \cdot (x',y') = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
   e. En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 1
   $$p_1(x) \cdot p_2(x) = \int_0^1 x^2 p_1(x) p_2(x) dx$$

2. En $\mathbb{R}^4$ consideremos, con el producto escalar usual, los siguientes subespacios
   $$U \equiv \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x - z + 3t = 0 \end{cases}$$
   $$W = < (1,2,-1,0), (0,1,1,0), (1,0,-2,1) >$$
   a. Obtener, usando el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal de cada uno de los anteriores subespacios.
   b. Hallar una base del subespacio ortogonal a cada uno de ellos.

c. Calcular la proyección ortogonal del vector $v = (2,3,-2,1)$ sobre U y también sobre W.

3. En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, sean los siguientes subespacios

$$U \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$W = < (2,0,-1),(0,-4,1) >$$

a. Obtener, usando el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal de cada uno de los anteriores subespacios.

b. Hallar una base del subespacio ortogonal a cada uno de ellos.

c. Calcular la proyección ortogonal del vector $v = (3,2,1)$ sobre U y también sobre W.

4. En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar dado por

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = 2xx' + 4yy' + zz'$$

se pide:

a. Obtener, usando el método de Gram-Schmidt, una base ortonormal para el subespacio

$$U =< (1,-1,2),(0,3,-2) >$$

y otra para $U^{\perp}$.

b. Idem para el subespacio

$$W = \{(x,y,z) \, : \, x - 2y + z = 0, \; 3x - 2y - z = 0\}$$

y otra para $W^{\perp}$.

c. Determinar la proyección ortogonal del vector $(-9,6,8)$ sobre U.

d. Idem para $(-9,6,8)$ sobre $U^{\perp}$.

e. Idem para $(-1,0,2)$ sobre W.

f. Idem para $(-1,0,2)$ sobre $W^{\perp}$.

5. En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera el producto escalar definido por

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = \int_0^1 p_1(x)p_2(x)dx$$

a. Calcular una base ortonormal para el subespacio dado por

$$W_1 =< x - 2, 1 - x^2 >$$

b. Hallar el subespacio ortogonal a

$$W_2 = < 1, 1 + x >$$

c. Hallar la proyección ortogonal del vector x^2 sobre el subespacio W_1 dado anteriormente.

6. Para cada una de las siguientes matrices reales simétricas, calcular una matriz diagonal semejante y una matriz de paso ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$