Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 4.1.4: DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

PROGRAMA DETALLADO:

Valores y vectores propios. Polinomio característico.
Definición y caracterización de matrices diagonalizables.
Dos aplicaciones de la diagonalización.
Cálculo de potencias de matrices diagonalizables.
El teorema de Cayle-Hamilton. Aplicación al cálculo de la inversa de una matriz.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

Valores y vectores propios. Polinomio característico.

Dado un endomorfismo $f: V \to V$, siendo V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, y llamando A a su matriz asociada en una cierta base de V, vamos a estudiar en este tema si existe un cambio de base tal que la nueva matriz asociada a f en esta nueva base, A' (que sabemos es semejante a A; es decir, sabemos que existe una matriz invertible P tal que $A' = P^{-1}AP$) sea lo más sencilla posible. En concreto, veremos cuando es posible conseguir que A' sea diagonal.

En este estudio que pretendemos realizar en este tema, veremos que juegan un papel fundamental aquellos vectores $\mathbf{v} \in V$ no nulos tales que $f(\mathbf{v})$ es proporcional a $\vec{\mathbf{v}}$, es decir $f(\vec{\mathbf{v}}) = \lambda\vec{\mathbf{v}}$, o en forma matricial $A \cdot \vec{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{v}}$:

Definition *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se dice que λ es un* ***valor propio*** *(o* ***autovalor****) de A si existe un vector $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cdot \vec{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{v}}$, es decir tal que*

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

En tal caso, se dice que $\vec{\mathbf{v}}$ es el ***vector propio*** *(o* ***autovector****) asociado al valor propio λ. Al conjunto de todos los vectores propios asociados a un mismo valor propio λ, que se demuestra que forman un subespacio vectorial de V, se le llama* ***subespacio vectorial propio asociado al valor propio*** *λ, y lo representaremos por*

$$V_\lambda = \left\{ \vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_v \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_v \end{pmatrix} \right\}$$

Proposition *Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ valores propios distintos de $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces:*

a) V_λ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

b) $V_\lambda \cap V_\mu = \emptyset$.

c) Si $\{\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_r}\} \subseteq V_\lambda$ y $\{\overrightarrow{w_1},\ldots,\overrightarrow{w_s}\} \subseteq V_\mu$ son conjuntos de vectores libres entonces $\{v_1,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_s\}$ es un sistema libre.

¿Cómo calcular los valores propios? El siguiente resultado nos indica lo que tenemos que hacer:

Proposition *Los valores propios son las soluciones de la ecuación (llamada **ecuación característica)***

$$|A - \lambda\mathbb{I}_n| = 0$$

Remark *Al polinomio $p(x) = |A - x\mathbb{I}_n|$ se le llama **polinomio característico**. De la anterior proposición se deduce que los valores propios de una matriz cuadrada no son sino las raíces de su polinomio característico.*

Definition *Se define la **multiplicidad de un valor propio** de una matriz cuadrada como la multiplicidad de éste como raíz de su polinomio característico.*

Example *Hallar los valores propios y los subespacios vectoriales propios asociados del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por:*

$$f(x,y,z) = (3x, x+2y, 4x+2z)$$

Example *Idem para las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definición y caracterización de matrices diagonalizables.

Definition *Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existe una matriz P invertible, $P \in GL_n(\mathbb{R})$, tal que $P^{-1}AP = D$, siendo D una matriz diagonal.*

El siguiente resultado nos caracteriza cuando una matriz es diagonalizable:

Proposition *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ sus valores propios con multiplicidades respectivas $m_1,m_2,\ldots,m_r$ (evidentemente, $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$). Entonces A es diagonalizable sí y sólo si su polinomio característico $p(x)$ solo tiene raíces reales y la multiplicidad de cada valor propio λ_i coincide con la dimensión del subespacio propio asociado V_{λ_i}.*

Remark *En base al resultado anterior se demuestra:*

a) Si una matriz cuadrada de orden n tiene n valores propios distintos, ésta es diagonalizable.

b) Toda matriz simétrica es diagonalizable.

Example *Estudiar si son diagonalizables las matrices del ejemplo anterior.*

Example *Analizar si es diagonalizable el endomorfismo de* $\mathbb{R}^4$ *dado por:*

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2,x_2,x_3+x_4,-x_3-x_4)$$

Remark *Observamos que el término diagonalizable se lo aplicamos indistintamente a una matriz o a un endomorfismo (en este último caso, nos referimos a su matriz asociada). Lo mismo ocurre con los términos valores y vectores propios, multiplicidades, etc.*

El resultado anterior nos dice cuando una matriz es diagonalizable. Pero en caso que lo sea... ¿seremos capaces de hallar la matriz P tal que $P^{-1}AP = D$? En tal caso, ¿cual es la matriz diagonal D que se obtiene? Efectivamente ésto es posible, como nos indica el siguiente resultado:

Proposition *Sea* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *una matriz diagonalizable, y sean* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{R}$ *sus valores propios con multiplicidades respectivas* $m_1,m_2,\ldots,m_r$*. Entonces A es semejante a una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios, contados cada uno tantas veces como multiplicidad tienen. Además la matriz P asociada a dicha matriz (y a la que se denomina* ***matriz de paso****) es la matriz cuyos* m_1 *primeros vectores columnas son los elementos de una base de* V_{λ_1}*, los* m_2 *siguientes vectores columnas son los elementos de una base de* V_{λ_2}*, etc.*

Example *Estudiar si el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *dado por*

$$f(x,y,z) = (x+2y+10z, 2x+y+10z, -x-y-6z)$$

es diagonalizable. En caso afirmativo, obtener la matriz de paso P y la matriz diagonal D.

Dos aplicaciones de la diagonalización.

Cálculo de potencias de matrices diagonalizables.

Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable, e imaginemos que pretendemos calcular A^k, siendo k un número natural. Veamos como la diagonalización de matrices nos da una forma fácil de obtener dicha potencia:

Como A es diagonalizable, existirá P regular tal que $P^{-1}AP = D$. Por tanto se tendrá que $A = PDP^{-1}$. Así,

$$A^k = A\cdot A\cdots^{(k)}A = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots^{(k)}(PDP^{-1}) = P\cdot D\cdots^{(k)}D\cdot P^{-1} = PD^kP^{-1}$$

lo cual nos da un método para el cálculo de la potencia $k-sima$ de una matriz, que puede ser más sencillo que multiplicar A por sí mismo k veces, ya que la potencia $k-sima$ de una matriz diagonal es otra matriz diagonal cuyo elemento (i,i) es la potencia $k-sima$ de la matriz original.

Example *Calcular A^{10} siendo A la matriz del último ejemplo.*

El teorema de Cayle-Hamilton. Aplicación al cálculo de la inversa de una matriz.

El teorema de Cayle-Hamilton, cuyo enunciado daremos a continuación, nos permitirá, entre otras cosas, resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, cosa que veremos en un posterior tema. Aquí veremos otra aplicación (cálculo de la inversa de una matriz mediante el cálculo de potencias de la misma):

Theorem *(**Cayle-Hamilton**): Si $p(x)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(A) = 0$.*

Este resultado nos permite calcular la inversa de una matriz cuadrada regular:

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ y $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es su polinomio característico, como $p(A) = 0$ tendremos

$$0 = A^{-1} \cdot p(A) = A^{-1}(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 \mathbb{I}_n) =$$
$$= A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 \mathbb{I}_n + a_0 A^{-1}$$

de donde, despejando A^{-1} resultará

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \ldots + a_1 \mathbb{I}_n)$$

Example *Aplicando el teorema anterior, calcular la inversa de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remark *Cuando estudiemos el concepto de ortogonalidad, veremos que un endomorfismo simétrico (o matriz simétrica) se puede diagonalizar "ortogonalmente".*

Ejercicios resueltos.

1. (Junio 2011) *Se considera la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Analizar si es diagonalizable, y, en caso afirmativo, calcular la matriz diagonal semejante y una matriz de paso asociada.

Solución: Calcularemos primero los valores propios de A :

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

que tiene por raíces $\lambda_1 = -1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$ (simple). Veamos ahora cuales son los subespacios vectoriales asociados a cada uno de los anteriores:

Para V_{λ_1} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = z$$

Por tanto

$$V_{\lambda_1} = \{(x,y,x)\} =< (1,0,1),(0,1,0) >$$

por lo que tiene dimensión 2 (coincide por tanto con la multiplicidad del valor propio λ_1).

Para V_{λ_2} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Por tanto

$$V_{\lambda_2} = \{(0,y,y)\} =< (0,1,1) >$$

por lo que tiene dimensión 1 (coincide por tanto con la multiplicidad del valor propio λ_2).

Así, A es matriz diagonalizable y se verificará

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (1er parcial, Febrero 2012) *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.a *Estudiar, en función de los valores de a y b cuando es diagonalizable.*

2.b *Para el caso $a = b = 0$, ¿A es diagonalizable?. En caso afirmativo, hallar la matriz diagonal y las matrices de cambio de base*

2.c *Calcular A^n en este último caso.*

Solución:

(2.a) Los valores propios de la matriz son $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, por lo que si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la matriz será diagonalizable (por tener 3 valores propios diferentes). Estudiemos por tanto lo que ocurre si $a = 1$ y si $a = 2$:

- Si $a = 1$, los valores propios son $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 2$. Calculemos el subespacio propio S_{λ_1} asociado a $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  lo que nos lleva a que $z = 0$ y a que $by = 0$. Así, si $b = 0$, tendremos como solución de este sistema $z = 0$, por lo que

$$S_{\lambda_1} =< (x,y,0) >=< (1,0,0),(0,1,0) >$$

  que tiene dimensión 2, por lo que A será diagonalizable. Sin embargo, si $b \neq 0$, tendremos que $y = 0$, por lo que la solución del sistema será $y = z = 0$, por lo que

$$S_{\lambda_1} =< (x,0,0) >=< (1,0,0) >$$

  que tiene dimensión 1 y A no es diagnonalizable.
- Si $a = 2$, con un razonamiento similar al anterior se llega a que si $b = 0$ la matriz es diagonalizable, mientras que si $b \neq 0$, no es diagonalizable.

(2.b) Para el caso $a = b = 0$, como $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la matriz será diagonalizable (por el apartado anterior), y si calculamos los vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, tendremos:

- S_{λ_1} :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  de donde resulta $S_{\lambda_1} =< (x,0,0) >=< (1,0,0) >$.
- De forma similar obtendremos $S_{\lambda_2} =< (0,y,0) >=< (0,1,0) >$ y $S_{\lambda_3} =< (0,2z,z) >=< (0,2,1) >$. Por tanto, A es diagonalizable siendo su matriz de paso P y su matriz diagonal D, tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, las dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.c) Como sabemos, se tiene que $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$, por lo que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

3. (1er parcial, Febrero 2013) *De la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$$

se sabe que $\lambda = 1$ es uno de sus valores propios, siendo $(1,1,1)$ su vector propio asociado. Se pide:

3.a *Hallar a, b y c.*

3.b *Hallar sus valores y vectores propios.*

3.c *Razonar si A es diagonalizable?. En caso afirmativo, hallar la matriz diagonal y las matrices de cambio de base.*

Solución:

(3.a) Como $(1,1,1)$ es un vector propio de valor propio $\lambda = 1$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde $a = -2$, $b = -2$ y $c = -3$.

(3.b) Pasamos entonces a calcular los valores y vectores propios de A :

En primer lugar calculamos el polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

lo que equivale a

$$\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 + 1 = 0$$

que tiene por raíces

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -1 \text{ (doble)}$$

- Del subespacio propio S_{λ_1} asociado a $\lambda_1 = 1$ sabemos, por el enunciado, que
$$S_{\lambda_1} =< (1,1,1) >$$
- Calculemos el subespacio propio S_{λ_2} asociado a $\lambda_2 = -1$: Hemos de resolver
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
de donde resultan 3 ecuaciones iguales
$$x + y - z = 0$$
por lo que $S_{\lambda_2} =< (x,y,x+y) >=< (1,0,1),(0,1,1) >$.

(3.c) Por lo anterior sabemos que A es diagonalizable, por lo que existe P y D tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. (1er parcial, Febrero 2014) *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un endomorfismo cuya matriz, respecto de la base canónica de* $\mathbb{R}^3$, *es*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{m} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

4.a *Estudiar para qué valores de m es f diagonalizable.*

4.b *Sea* $m = 1$. *Hallar una matriz diagonal D y una base de* $\mathbb{R}^3$ *respecto de la cual la matriz de f sea D.*

4.c *Para* $m = 1$, *calcular* A^{100} .

Solución:

(4.a) Los valores propios de la matriz A vienen dados por

$$|A - \lambda Id| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{m} - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de donde se obtienen las raíces $\lambda_1 = \mathbf{m}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Por lo tanto, si $\mathbf{m} \neq \{1, -1\}$, se tendrá que A es diagonalizable (al tener 3 valores propios reales distintos). Veamos que ocurre si $\mathbf{m}$ vale 1 o -1 :

- Si $\mathbf{m} = 1$: Se trata de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por valores propios $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = -1$. Si calculamos sus subespacios vectoriales propios asociados:

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \ : \ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(x,y,2x-y)\} =$$

$$= < (1,0,2),(0,1,-1) >$$

mientras que

$$S_{-1} = \left\{ (x,y,z) \ : \ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(0,y,y)\} = < (0,1,1) >$$

Por tanto, la matriz es diagonalizable en este caso.

- Si $\mathbf{m} = -1$: Se trata de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por valores propios $\lambda_1 = -1$ (doble) y $\lambda_2 = 1$. Si calculamos sus subespacios vectoriales propios asociados:

$$S_{-1} = \left\{ (x,y,z) \;:\; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(0,0,z)\} =$$

$$= \langle\, (0,0,1)\, \rangle$$

por lo que la matriz no será diagonalizable.

(4.b) En el apartado anterior tenemos realizados todos los cálculos que nos piden (se trata del caso $\mathbf{m} = 1$), por lo que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4.c) Se verifica

$$A^{100} = (P \bullet D \bullet P^{-1})^{100} = P \bullet D^{100} \bullet P^{-1} = P \bullet Id \bullet P^{-1} = Id$$

5. (1er parcial, Febrero 2015) *Para todo $a \in \mathbb{R}$ se considera la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a+9 & -6 & a-3 \\ -6 & a & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

5.a *Calcular los valores propios de A, según los valores de a.*
5.b *Determinar los valores de a para los que A es diagonalizable.*
5.c *Para $a = 3$ calcular, usando diagonalización, A^{100}. NOTA: Se puede dejar indicado como producto de matrices.*

Solución:
(5.a) El polinomio característico viene dado por

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a+9-\lambda & -6 & a-3 \\ -6 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 15-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$(15-\lambda)(\lambda-(a+12))(\lambda-(a-3)) = 0$$

por lo que los valores propios serán $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = a+12$, $\lambda_3 = a-3$,

(5.b) Vistos los anteriores valores propios, si $a \neq 3$, y $a \neq 18$, la matriz será diagonalizable (por tener 3 valores propios distintos). Como además, si $a = 3$ la matriz también es diagonalizable (por ser simétrica), sólo nos falta por estudiar el caso $a = 18$: Se trata entonces de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 27 & -6 & 15 \\ -6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

que sabemos tiene por valores propios $\lambda_1 = 15$ (doble) y $\lambda_2 = 27$. Si calculamos los respectivos subespacios vectoriales, tendremos para V_{λ_1} :

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z) \ : \ A(x,y,z)^T = 15(x,y,z)^T\right\}$$

Si resolvemos este sistema, resulta que tanto y como z dependen de x, por lo que $\dim(V_{\lambda_1}) = 1$ y A no es diagonalizable.

(5.c) Para $a = 3$, resulta la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

que sabemos tiene por valores propios $\lambda_1 = 15$ (doble) y $\lambda_2 = 0$.

Si calculamos los respectivos subespacios vectoriales, tendremos

$$V_{\lambda_1} = \left\{(x,y,z) \ : \ A(x,y,z)^T = 15(x,y,z)^T\right\} =\ldots= \{(-2y,y,z)\} =< (-2,1,0),(0,0,1) >$$

$$V_{\lambda_2} = \left\{(x,y,z) \ : \ A(x,y,z)^T = 0(x,y,z)^T\right\} =\ldots= \{(x,2x,0)\} =< (1,2,0) >$$

Por lo tanto tenemos dos matrices P y D, tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener A^{100} utilizamos que

$$A^{100} = (PDP^{-1})^{100} =\ldots= PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 15^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

6. (1er parcial, Febrero 2016) *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un endomorfismo y A su matriz asociada. Sabiendo que el vector* $(0,2,1)$ *se transforma en* $(1,1,0)$ *y que* 1 *es un valor propio de A con subespacio vectorial propio asociado* $< (1,1,0),(1,0,1) >$*, se pide:*

6.a *Calcular todos los valores propios de A y sus subespacios propios asociados.*

6.b *Justificar porqué A es diagonalizable, y establecer la matriz de paso P y la matriz diagonal D tal que* $P^{-1}AP = D$*.*

6.c *Determinar* A^n*.*

Solución:

(6.a) Supongamos que A es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

y exigiendo que se cumplan las hipótesis del enunciado, es decir, haciendo que $f(0,2,1) = (1,1,0)$ así como que $f(1,1,0) = 1 \cdot (1,1,0)$ y que $f(1,0,1) = 1 \cdot (1,0,1)$, se llega a

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene por valores propios

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de donde

$$2\lambda^2 - \lambda - \lambda^3 = 0$$

que tiene por soluciones $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 0$ (simple); además sabemos que $S_{\lambda_1} =< (1,1,0),(1,0,1) >$, por lo que solo necesitamos obtener S_{λ_2} :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de donde

$$S_{\lambda_2} = \{(-y,y,y)\} =< (-1,1,1) >$$

(6.b) La matriz es diagonalizable ya que la dimensión de cada subespacio vectorial propio coincide con la multiplicidad de cada valor propio. Además, se tiene que existen P y D tal que $P^{-1}AP = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{y } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(6.c) Sabemos que

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos.

1. Calcular los valores propios y los subespacios vectoriales asociados para las siguientes matrices:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_8 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad M_9 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinar cuales de estas matrices son diagonalizables en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, y para las que lo sean, hallar las matrices diagonales asociadas y las matrices de paso correspondientes. Calcular la potencia n-sima de aquellas matrices que sean diagonalizables.

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix}$$

estudiar para qué valores de a y b la matriz es diagonalizable. Para aquellos que lo sea, hallar su matriz diagonal asociada y la matriz de paso P.

3. Supongamos que tenemos una matriz cuadrada A de orden 3 de la que sabemos que $f(0,2,1) = (-2,-2,0)$ y que una base para $\ker(A+2I)$ es $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$, donde hemos denotado por f al endomorfismo asociado a la matriz A respecto de la base canónica. Determinar si A es o no diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar la matriz diagonal y la matriz de paso. Estudiar si f es inyectiva y/o suprayectiva.

4. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(e_1) = 4e_1 - e_2;\ f(e_2) = 2e_1 - e_2;\ f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3$$

a. Hallar la matriz de f en la base B.

b. Comprobar que la anterior matriz es diagonalizable y obtener la matriz diagonal y la matriz de paso asociada.

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica.

a. Discutir, según valores de a y b, si existen $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x,y,z) = (1,b,1)$.

b. Para $a = 0$, probar que A es diagonalizable. Obtener la matriz diagonal semejante de A, la base correspondiente y la matriz de paso P.

6. Sea $B = \{u_1,u_2,u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(u_1) = 4u_1;\ f(u_2) = au_1 + u_2 + 3u_3;\ f(u_3) = u_1 + 2u_2 + 2u_3$$

a. Calcular la matriz A del endomorfismo en dicha base. Obtener los valores propios y los valores de a para los cuales f es diagonalizable.

b. Obtener una base de $\mathbb{R}^3$ para la cual la matriz de f sea diagonal, dando dicha matriz diagonal D. Dar otra matriz diagonal D' semejante a A y una matriz de paso asociada a ésta.