Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 4.1.3: APLICACIONES LINEALES

PROGRAMA DETALLADO:

Aplicaciones lineales. **Primeras propiedades y ejemplos**.
Tipos de aplicaciones lineales. **Subespacios asociados a una aplicación lineal**.
Matrices y aplicaciones lineales:
Matriz asociada a una aplicación lineal.
Operaciones con aplicaciones lineales y matrices.
Matriz del cambio de base.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

Aplicaciones lineales. Primeras propiedades y ejemplos.

En este tema estudiaremos las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales que son aplicaciones que respetan la estructura de espacio vectorial. El resultado más importante nos dice que cada aplicación lineal viene determinada por las imágenes de los elementos de una base, lo que permite asociar a una aplicación lineal, una base del dominio y otra del codominio, una matriz que representa dicha aplicación respecto de dichas bases. Además introduciremos las matrices de cambio de base, que permiten a partir de las coordenadas de un vector respecto de una base, obtener sus coordenadas respecto de otra base.

Definition *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $f: V \to W$ se dice que es una **aplicación lineal** (también se llama **homomorfismo**) si verifica las siguientes propiedades:*

a) $f\left(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}\right) = f(\vec{\mathbf{u}}) + f(\vec{\mathbf{v}}),\ \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in V.$

b) $f(\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}) = \alpha \cdot f(\vec{\mathbf{u}}),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in V.$

Remark *a) Las dos condiciones anteriores equivalen a que se verifique*

$$f\left(\alpha \cdot \vec{\mathbf{u}}+\boldsymbol{\beta} \cdot \vec{\mathbf{v}}\right) = \alpha \cdot f(\vec{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\beta} \cdot f(\vec{\mathbf{v}}),\ \forall \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

*b) Caso que $V = W$, a la aplicación lineal $f: V \to V$ se le llama **endomorfismo**.*

Example *La aplicación $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (2x - y + 3z, x + y - z)$ es un homomorfismo.*

Example *Sea $V = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ es continua en } [0,1]\right\} \equiv \mathcal{C}([0,1])$. La aplicación $f: \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(\varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x)dx$$

es lineal.

Remark *Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, se verifican:*

a) $f(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}}$

b) Si $S \leq V$, entonces $f(S) \leq W$.

c) Si $g : W \to Z$ es otra aplicación lineal, entonces $g \circ f : V \to Z$ es una aplicación lineal.

d) Si $\tilde{S} \leq W$, entonces $f^{-1}(\tilde{S}) \leq V$.

e) Si f es biyectiva, entonces $f^{-1} : W \to V$ es una aplicación lineal biyectiva.

Veamos que las aplicaciones lineales quedan totalmente determinadas por las imágenes de los elementos de una base de su conjunto inicial:

Proposition *Sean V, W espacios vectoriales, $B = \left\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n\right\}$ una base de V y $\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n$ elementos de W. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to W$ tal que $f(\vec{\mathbf{u}}_i) = \vec{\mathbf{w}}_i,\ 1 \leq i \leq n$.*

Tipos de aplicaciones lineales. Subespacios asociados a una aplicación lineal.

Definition *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces diremos que f es* ***Monomorfismo*** *si f es inyectiva;* ***Epimorfismo*** *si f es suprayectiva;* ***Isomorfismo*** *si f es biyectiva;* ***Automorfismo*** *si f es un endomorfismo biyectivo.*

Asociados a una aplicación lineal *f* hay dos subespacios vectoriales que merecen destacarse:

Definition *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Definimos el* ***Núcleo*** *de f, como el conjunto, que representaremos por* **Ker***f, dado por*

$$\mathbf{Ker}(f) = \left\{\vec{\mathbf{u}} \in V \mid f(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}\right\}$$

Notemos que $\mathbf{Ker}(f) = f^{-1}(\vec{\mathbf{0}})$ y éste es un subespacio vectorial de V.

Definition ***Imagen*** *de f, como el conjunto, que representaremos por $\mathbf{Im}(f)$,*

$$\mathbf{Im}(f) = \left\{f(\vec{\mathbf{u}}) \mid \forall \vec{\mathbf{u}} \in V\right\}$$

Así $\mathbf{Im}(f) = f(V)$ y es un subespacio vectorial de W. A la dimensión del subespacio vectorial $\mathbf{Im}(f)$ se le llama ***rango*** *de f.*

Una forma fácil de calcular $\mathbf{Im}(f)$ nos la da el siguiente resultado:

Proposition *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal y $B = \left\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n\right\}$ una base de V. Entonces $f(B) = \left\{f\left(\vec{\mathbf{u}}_1\right), f\left(\vec{\mathbf{u}}_2\right), \ldots, f\left(\vec{\mathbf{u}}_n\right)\right\}$ es un sistema generador de $\mathbf{Im}(f)$.*

Estos subespacios sirven para caracterizar el tipo de aplicación que es f :

Proposition *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces:*

a) f es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\mathbf{Ker}(f) = \vec{\mathbf{0}}$.

b) f es suprayectiva $\Leftrightarrow$ $\mathbf{Im}(f) = W$.

Remark *Se prueba que si V, W son finitamente generados y $f : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces*

$$\dim(V) = \dim(\mathbf{Ker}(f)) + \dim(\mathbf{Im}(f))$$

Example *Estudiar si la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (z, x+y, -z)$ es lineal. Calcular $\mathbf{Ker}(f)$ e $\mathbf{Im}(f)$. Clasificar f.*

Example *Idem para $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x,y,z) = (x+z, y-z, x+y, x-y+2z)$.*

Example *Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ (polinomios de grado menor o igual que 3) y $W = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$). Se define $f : V \to W$ por $f(p(x)) = p'(x)$. Probar que f es lineal y calcular $\mathbf{Ker}(f)$ e $\mathbf{Im}(f)$.*

Matrices y aplicaciones lineales.

Matriz asociada a una aplicación lineal.

Para manejarnos correctamente con las aplicaciones lineales, vamos a recurrir a las coordenadas. Así, si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, si $B = \{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_m\}$ es una base de V, y si $B' = \{\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\}$ es una base de W, lo que se pretende es obtener las coordenadas de $\vec{\mathbf{w}} = f(\vec{\mathbf{u}})$ en función de las coordenadas de $\vec{\mathbf{u}}$. Veremos que ésto se puede expresar en forma matricial, obteniendo una matriz cuyas columnas no son sino las coordenadas de $f(\vec{\mathbf{u}}_i)$ en función de la base B' de W. Y además esto se hará de forma inequívoca, es decir, dada una aplicación lineal siempre tendrá asociada una matriz, y dada una matriz, ésta siempre tendrá asociada una única aplicación lineal:

Sean $f : V \to W$ una aplicación lineal, $B = \{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_m\}$ es una base de V, y $B' = \{\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_n\}$ una base de W. Dado $\vec{\mathbf{u}} \in V$, sabemos que existen escalares α_j tales que

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \vec{\mathbf{u}}_j,$$

y como f es una aplicación lineal, se tendrá

$$f(\vec{\mathbf{u}}) = f\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j . \vec{\mathbf{u}}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f(\vec{\mathbf{u}}_j)$$

Por otro lado, como $f(\vec{\mathbf{u}}_j) \in W$, este vector podrá ponerse en función de los vectores de la base de W. Por tanto existirán coordenadas λ_{ij} tales que

$$f(\vec{\mathbf{u}}_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

Uniendo todas las igualdades tendremos

$$f(\vec{\mathbf{u}}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot f(\vec{\mathbf{u}}_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot \vec{\mathbf{v}}_i \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \alpha_j \right) \cdot \vec{\mathbf{v}}_i$$

Pero al ser $f(\vec{\mathbf{u}}) \in W$, resultará que

$$f(\vec{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \vec{\mathbf{w}}_i$$

Consecuencia de la unicidad de las coordenadas de un vector en una base, y de la igualdades anteriores, se tiene, para cada $1 \le i \le n$, que

$$\beta_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \alpha_j$$

Si introducimos la matriz

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nxm}(\mathbb{K}),$$

cuyas columnas corresponden a las coordenadas en la base B' de las imágenes por f de los vectores de la base B, la relación anterior puede ponerse de la forma

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = M_{BB'}(f) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

A la matriz $M_{BB'}(f)$ se le llama **matriz de f en las bases B y B'** y permite obtener las coordenadas en la base B' de la imagen por f de cualquier vector a partir de sus coordenadas en la base B.

Remark *Si f es un endomorfismo ($V = W$) y consideramos la misma base B en el conjunto inicial y en el final, a $M_{BB}(f)$ se le representará por $M_B(f)$.*

Example *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por $f(x,y,z) = (x+z, y-z, x+y, x-y+2z)$. Calcular la matriz asociada a f en las respectivas bases canónicas.*

Example *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *la aplicación lineal de la que se conoce que*

$$f(1,0,0) = (3,2,-1,1), \qquad f(1,1,0) = (5,-4,1,-2), \qquad f(1,1,1) = (2,1,-6,3)$$

Calcular la matriz asociada a f *en las respectivas bases canónicas.*

Example $(*)$ *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal dada por* $f(x,y,z) = (3x-2z, y-z, -x+4y+5z)$. *Calcular:*

a) La matriz asociada a f *en las respectivas bases canónicas.*

b) La matriz asociada a f *cuando se consideran las nuevas bases* $B = \{(1,3,0),(1,0,2),(0,4,-2)\}$ *en* $\mathbb{R}^3$ *y* $B' = \{(2,1),(4,3)\}$ *en* $\mathbb{R}^2$.

Operaciones con aplicaciones lineales y matrices.

Proposition *Sean* V, W *y* Z *espacios vectoriales. Entonces:*

a) Si $f,\ g : V \to W$ *son aplicaciones lineales,* $\alpha \in \mathbb{K}$ *y* B_1, B_2 *son bases de* V *y* W *respectivamente, entonces*

$$M_{B_1B_2}(f+g) = M_{B_1B_2}(f) + M_{B_1B_2}(g) \qquad y \qquad M_{B_1B_2}(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot M_{B_1B_2}(f)$$

b) Si $f : V \to W$ *y* $g : W \to Z$ *son aplicaciones lineales y* B_1, B_2, B_3 *son bases de* V, W *y* Z *respectivamente, entonces*

$$M_{B_1B_3}(g \circ f) = M_{B_2B_3}(g) M_{B_1B_2}(f)$$

c) Supongamos que $\dim V = m$, $\dim W = n$ *y* B_1, B_2 *bases de* V *y* W *respectivamente. Sea* $f : V \to W$ *lineal y denotemos por* $A = M_{B_1B_2}(f)$. *Entonces* $rango(A) = rango(f)$ *y además:*

f *es inyectiva* $\Leftrightarrow rango(A) = m$

f *es suprayectiva* $\Leftrightarrow rango(A) = n$

f *es biyectiva* $\Leftrightarrow rango(A) = m = n$

d) Si B_1, B_2 *son bases de* V *y* W *respectivamente y* $f : V \to W$ *es un isomorfismo, entonces*

$$M_{B_1B_2}(f^{-1}) = (M_{B_1B_2}(f))^{-1}$$

Matriz del cambio de base.

Cambio de base en un mismo espacio vectorial (Recordatorio; está estudiado en el tema anterior).

Vamos a realizar un recordatorio de una sección vista en el tema anterior (Cambio de base en un espacio vectorial), aunque este cambio ahora lo vamos a expresar a través de la matriz asociada a una aplicación lineal (que va a ser la aplicación identidad, como vemos a continuación):

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y B una base cualquiera de V. Es evidente que la matriz de la aplicación identidad Id_V (la aplicación identidad es aquella que viene definida por $Id_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$) respecto de la base B es la matriz identidad, es decir, $M_{BB}(Id_V) = \mathbb{I}_n$. Sin embargo esto no ocurre cuando se consideran en V bases distintas, es decir, supongamos que B' es otra base de V. A las matrices $M_{BB'}(Id_V)$ y $M_{B'B}(Id_V)$ reciben el nombre de **matrices de**

cambio de base. Veamos con un ejemplo como calcular estas matrices:

Example *Dadas las bases de* $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ *y* $B' = \{(1,0),(2,1)\}$, *hallar* $M_{BB'}(Id_{\mathbb{R}^2})$ *y* $M_{B'B}(Id_{\mathbb{R}^2})$. *¿Qué relación existen entre ellas?*

Remark *Como hemos visto en el anterior ejemplo, las matrices de cambio de base son invertibles y se verifica*

$$(M_{BB'}(Id_V))^{-1} = M_{B'B}(Id_V)$$

Matriz del cambio de bases en una aplicación lineal.

Para hallar la matriz A asociada a una aplicación lineal $f: V \to W$ hemos tomado bases en V y en W, y respecto de ellas (calculando las imágenes de los elementos de la base de V en función de los elementos de la base de W) se determina A. Pero si las bases iniciales en V y W se cambian por otras, la matriz asociada A' será distinta de la anterior, como hemos visto en el **Example** anterior $(*)$. Veamos cual es la relación entre ambas matrices A y A', y como se puede esquematizar fácilmente su cálculo:

Proposition *Sean* V *y* W *dos espacios vectoriales y consideremos bases distintas* B_1, B_1' *en* V *y* B_2, B_2' *en* W. *Entonces dada la aplicación lineal* $f: V \to W$ *se verifica*

$$M_{B_1',B_2'}(f) = M_{B_2,B_2'}(Id_W) \times M_{B_1,B_2}(f) \times M_{B_1,B_1'}(Id_V)$$

Remark *Simbólicamente, la anterior igualdad puede representarse por*

$$V \overset{Id}{--\to} V \xrightarrow{f} W \overset{Id}{--\to} W$$

$$B_1' \overset{M_{B_1,B_1'}(Id_V)}{\longmapsto} B_1 \overset{M_{B_1,B_2}(f)}{\longmapsto} B_2 \overset{M_{B_2,B_2'}(Id_W)}{\longmapsto} B_2'$$

Remark *La anterior igualdad suele expresarse en la forma*

$$A' = Q^{-1}AP$$

Cuando se verifica una expresión de este tipo, se dice que A *y* A' *son* ***matrices equivalentes***.

Remark *Así, por ejemplo, si partimos de que conocemos la matriz asociada a una aplicación lineal* $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *respecto de las bases canónicas* $C_{\mathbb{R}^3}$, $C_{\mathbb{R}^2}$ *y queremos calcular la nueva matriz en bases* B *(de* $\mathbb{R}^3$*) y* B' *(de* $\mathbb{R}^2$*), el esquema anterior sería*

$$\mathbb{R}^3 \overset{Id}{--\to} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \overset{Id}{--\to} \mathbb{R}^2$$

$$B \overset{M_{B,C_{\mathbb{R}^3}}(Id_{\mathbb{R}^3})}{\longmapsto} C_{\mathbb{R}^3} \overset{M_{C_{\mathbb{R}^3},C_{\mathbb{R}^2}}(f)}{\longmapsto} C_{\mathbb{R}^2} \overset{M_{C_{\mathbb{R}^2},B'}(Id_{\mathbb{R}^2})}{\longmapsto} B'$$

y la nueva matriz resultante se obtiene de realizar el producto (observar como se multiplican en orden contrario a como las matrices aparecen en el esquema anterior)

$$M_{B,B'}(f) = M_{C_{\mathbb{R}^2},B'}(Id_{\mathbb{R}^2}) \times M_{C_{\mathbb{R}^3},C_{\mathbb{R}^2}}(f) \times M_{B,C_{\mathbb{R}^3}}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

mientras que si partimos de que se conoce la matriz asociada a una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ respecto de las bases bases B (de $\mathbb{R}^3$) y B' (de $\mathbb{R}^2$), $M_{B,B'}(f)$, y queremos obtener su matriz respecto de las bases canónicas $C_{\mathbb{R}^3}$, $C_{\mathbb{R}^2}$, el esquema será

$$\mathbb{R}^3 \overset{Id}{\dashrightarrow} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \overset{Id}{\dashrightarrow} \mathbb{R}^2$$

$$C_{\mathbb{R}^3} \overset{M_{C_{\mathbb{R}^3},B}(Id_{\mathbb{R}^3})}{\longmapsto} B \overset{M_{B,B'}(f)}{\longmapsto} B' \overset{M_{B',C_{\mathbb{R}^2}}(Id_{\mathbb{R}^2})}{\longmapsto} C_{\mathbb{R}^2}$$

y la nueva matriz resultante será

$$M_{C_{\mathbb{R}^3},C_{\mathbb{R}^2}}(f) = M_{B',C_{\mathbb{R}^2}}(Id_{\mathbb{R}^2}) \times M_{B,B'}(f) \times M_{C_{\mathbb{R}^3},B}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

Para ilustrar estas igualdades, volvemos a realizar el apartado (b) del **Example** $(*)$:

Example *Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que respecto de las bases canónicas tiene por matriz asociada*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz asociada a f cuando se consideran las nuevas bases en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ dadas por $B=\{(1,3,0),(1,0,2),(0,4,-2)\}$ y $B'=\{(2,1),(4,3)\}$.

Caso particular: **Matriz de un endomorfismo**.

Suele ser habitual considerar el caso en el que $f: V\to V$ es un endomorfismo, así como dar una nueva misma base B para el conjunto inicial y para el conjunto final. Veamos entonces como funciona en este caso el cambio de base:

En este caso, y si consideramos que se quiere pasar de la matriz de f en bases canónicas a la matriz en una nueva base B, el esquema anterior sería (lo hacemos, por ejemplo, para $\mathbb{R}^3$),

$$\mathbb{R}^3 \overset{Id}{\dashrightarrow} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \overset{Id}{\dashrightarrow} \mathbb{R}^3$$

$$B \overset{M_{B,C_{\mathbb{R}^3}}(Id_{\mathbb{R}^3})}{\longmapsto} C_{\mathbb{R}^3} \overset{M_{C_{\mathbb{R}^3}}(f)}{\longmapsto} C_{\mathbb{R}^3} \overset{M_{C_{\mathbb{R}^3},B}(Id_{\mathbb{R}^3})}{\longmapsto} B$$

y la nueva matriz resultante será

$$M_B(f) = M_{C_{\mathbb{R}^3},B}(Id_{\mathbb{R}^3}) \times M_{C_{\mathbb{R}^3}}(f) \times M_{B,C_{\mathbb{R}^3}}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

pero como se verifica

$$M_{C_{\mathbb{R}^3},B}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \left(M_{B,C_{\mathbb{R}^3}}(Id_{\mathbb{R}^3})\right)^{-1}$$

se tendría que

$$M_B(f) = \left(M_{B,C_{\mathbb{R}^3}}(Id_{\mathbb{R}^3})\right)^{-1} \times M_{C_{\mathbb{R}^3}}(f) \times M_{B,C_{\mathbb{R}^3}}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

Remark *En este caso, se observa que la igualdad que nos permite obtener la nueva matriz corresponde al tipo*

$$A' = P^{-1}AP$$

*Cuando se verifica una relación de este tipo, se dice que A y A' son **matrices semejantes**.*

Example *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ tiene asociada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz A' asociada a f en la nueva base $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Ejercicios resueltos.

1. (Junio 2011) *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y consideremos la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, donde $e_1 = (-1,0,1)$, $e_2 = (0,1,1)$ y $e_3 = (0,-1,0)$. Supongamos que*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ cumple que $f(e_1 + e_2) = (1,0,2)$. Se pide

1.a *Probar que $x = -1$.*

1.b *Calcular la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y su expresión analítica.*

1.c *Estudiar la inyectividad y suprayectividad de f, y calcular bases para su núcleo e imagen.*

Solución:

(1.a) Se verifica

$$(1,0,2) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = (x \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3) + (0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3) =$$
$$= x \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 = x(-1,0,1) + 1(0,1,1) + 1(0,-1,0) = (-x, 0, -x+1)$$

de donde se deduce que $x = -1$.

(1.b) Consideramos el esquema dado por

$$\underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{B}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{B}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{C}{\mathbb{R}^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_C(f) = M_{B.C}(Id) \times M_B(f) \times M_{C,B}(Id)$$

es decir

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

y la expresión analítica de f es

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(1.c) Vamos a resolver este apartado con la matriz obtenida en el apartado anterior:
Si calculamos primero la base para Im(*f*), como sabemos que se verifica

$$\mathrm{Im}(f) =< (-2,0,-4),(-1,0,-2),(1,-1,2) >=< (-1,0,-2),(1,-1,2) >$$

por lo que Im(*f*) tiene dimensión 2 (por tanto *f* no es suprayectiva). De aquí conocemos que la dimensión del núcleo habrá de ser 1; para hallar una base suya, hacemos

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

por lo que **Ker**(*f*) $=< (x,-2x,0) >=< (1,-2,0) >$, y también sabemos que *f* no es inyectiva.

2. (1er parcial, Febrero 2012) *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal que verifica:*
   - ◇ **Ker**(*f*) $= \left\{(x,y,z) \ : \ 3y+z = 0, \ 2x-y+z = 0\right\}$
   - ◇ $f(1,0,1) = (1,1,-1)$
   - ◇ $(0,1,-1)$ *es un vector propio de valor propio* $\lambda = 2$

   Calcular:

2.a *La matriz de f respecto de las bases canónicas.*
2.b *La dimensión y las ecuaciones del núcleo y de la imagen de f y estudiar la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.*
2.c *La matriz de f respecto de las bases* B_1 *de* $\mathbb{R}^3$ *y* B_2 *de* $\mathbb{R}^3$*, siendo*

$$B_1 = \{(1,1,0),(1,0,-1),(0,-1,1)\}$$
$$B_2 = \{(1,0,-1),(0,-1,1),(0,2,1)\}$$

Solución:
(2.a) Representaremos por A a la matriz buscada, que inicialmente supondremos que viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

y vamos a calcular todos estos coeficientes usando las condiciones que sabemos que verifica f :

- Como

$$\mathbf{Ker}(f) = \left\{(x,y,z) \ : \ 3y+z = 0, \ 2x-y+z = 0\right\} = \left\{(x,y,z) \ : \ z = -3y, \ x = 2y\right\} =$$
$$= \{(2y,y,-3y)\} =< (2,1,-3) >$$

  esto significa que $f(2,1,-3) = (0,0,0)$ o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  que nos da lugar a un sistema de 3 ecuaciones con 9 incógnitas.
- De $f(1,0,1) = (1,1,-1)$ se obtiene otro sistema de 3 ecuaciones con 9 incógnitas

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Como $(0,1,-1)$ es un vector propio de valor propio $\lambda = 2$, esto quiere decir que $f(0,1,-1) = 2(0,1,-1)$, o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo entonces los sistemas por separado

$$\begin{cases} 2a_1 + b_1 - 3c_1 = 0 \\ a_1 + c_1 = 1 \\ b_1 - c_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_2 + b_2 - 3c_2 = 0 \\ a_2 + c_2 = 1 \\ b_2 - c_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_3 + b_3 - 3c_3 = 0 \\ a_3 + c_3 = -1 \\ b_3 - c_3 = -2 \end{cases}$$

se llega a

$$a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{2}; \qquad a_2 = 0,\ b_2 = 3,\ c_2 = 1; \qquad a_3 = 0,\ b_3 = -3,\ c_3 = -1$$

por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2.b) En el apartado anterior tenemos dada una base para **Ker**(f) y sus ecuaciones vienen dadas en el enunciado. Así ya sabemos que su dimensión es 1 (por lo que f no puede ser inyectiva) y que la dimensión para la Im(f) será 2 (por lo que f no será suprayectiva). Además,

$$\mathrm{Im}(f) =< (1/2,0,0),(1/2,3,-3),(1/2,-3,-1) >=< (1/2,0,0),(1/2,3,-3) >$$

Para hallar sus ecuaciones, planteamos el sistema dado por

$$(x,y,z) = \alpha(1/2,0,0) + \beta(1/2,3,-3)$$

eliminamos α y β y resultará $y + z = 0$. Por tanto, Im$(f) = \{(x,y,z)\ :\ y + z = 0\}$

(2c.) Aplicamos el esquema tradicional

$$\underset{B_1}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{Id} \underset{B_2'}{\mathbb{R}^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_{B_1,B_2'}(f) = M_{C,B_2}(Id) \times M_C(f) \times M_{B_1',C}(Id)$$

es decir

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (1er parcial, Febrero 2013) *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal que verifica:* $f(0,0,-1) = (10,-5,-3)$ *y* $f(\mathbf{s}) = 3 \cdot s$ *para todo s de S, siendo*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$$

Calcular:

3.a *La matriz de f respecto de las bases canónicas.*

3.b *La dimensión y las ecuaciones del núcleo y de la imagen de f y estudiar la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.*

3.c *La matriz de f respecto de las bases canónica en el conjunto inicial y B' en el final, siendo*

$$B' = \{(1,-2,1),(0,2,-3),(1,0,2)\}$$

Solución:

(3.a) Representaremos por A a la matriz buscada, que inicialmente supondremos que viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

y vamos a calcular todos estos coeficientes usando las condiciones que sabemos que verifica f :

- Como $f(0,0,-1) = (10,-5,-3)$, esto significa que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

  de donde $c_1 = -10,\ c_2 = 5$ y $c_3 = 3$.
- Como sabemos como son las imágenes de los vectores de S (nos dice el enunciado que $f(\mathbf{s}) = 3 \cdot \mathbf{s}$), y se tiene que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} = \{(x,y,-x-y)\} =< (1,0,-1),(0,1,-1) >$$

  tendremos que $f(1,0,-1) = 3(1,0,-1)$ y $f(0,1,-1) = 3(0,1,-1)$, o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -10 \\ a_2 & b_2 & 5 \\ a_3 & b_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -10 \\ a_2 & b_2 & 5 \\ a_3 & b_3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  de donde $a_1 = -7,\ a_2 = 5$ y $a_3 = 0$; y $b_1 = -10,\ b_2 = 8$ y $b_3 = 0$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -10 & -10 \\ 5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(3.b) Sabemos que

$$\mathbf{Im}(f) =< (-7,5,0),(-10,8,0),(-10,5,3) >$$

y como estos vectores son linealmente independientes (el determinante de su matriz es claramente no nulo), será $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, por lo que f será suprayectiva. Además se tendrá que verificar entonces que $\dim(\mathbf{ker}(f)) = 0$, por lo que sin calcularlo sabemos que *f* es inyectiva y que $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$.

(3c.) Aplicamos el esquema tradicional

$$\underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{C}{\mathbb{R}^3} \to \underset{B'}{\mathbb{R}^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_{C,B'}(f) = M_{C,B'} \times M_C(f)$$

es decir

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & -10 & -10 \\ 5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} -\frac{43}{8} & -8 & -\frac{61}{8} \\ -\frac{23}{8} & -4 & -\frac{41}{8} \\ -\frac{13}{8} & -2 & -\frac{19}{8} \end{pmatrix}$$

4. (1er parcial, Febrero 2014) *Sea* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *una aplicación lineal que verifica:*
   $f(\mathbf{s}) = 2s$ *para todo s de S, siendo*
   $$S = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + t = 0,\ 4z - t = 0\right\}$$
   $f(\mathbf{t}) = -t$ *para todo t de T, siendo*
   $$T = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = 0,\ x + y + z = 0\right\}$$
   Calcular:
   4.a *La matriz de f respecto de las bases canónicas.*
   4.b *La dimensión y las ecuaciones del núcleo y de la imagen de f. ¿Qué tipo de aplicación es?*
   4.c *La matriz de f respecto de las base B en el conjunto inicial y la canónica en el final, siendo*
   $$B = \{(1,0,1,0),(0,1,0,2),(-1,0,0,1),(1,1,0,-1)\}$$

Solución:

(4.a) Buscamos una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

que ha de cumplir una serie de condiciones. Como se tiene que

$$\begin{aligned} S &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + t = 0,\ 4z - t = 0\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z,t) : t = 4z,\ y = 2x + 4z\right\} = \{(x,2x+4z,z,4z)\} = \\ &= < (1,2,0,0),(0,4,1,4) > \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t = 0,\ x + y + z = 0\right\} = \{(x,y,-x-y,0)\} = \\ &= < (1,0,-1,0),(0,1,-1,0) > \end{aligned}$$

por las condiciones del enunciado ($f(\mathbf{s}) = 2\mathbf{s}$ para todo $\mathbf{s}$ de S; $f(\mathbf{t}) = -\mathbf{t}$ para todo $\mathbf{t}$ de T), habrá de ser

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix}0\\4\\1\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\4\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Resolviendo estos sistemas de ecuaciones se llega a que

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-5/4\\2&1&2&1/2\\0&0&-1&3/4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

(4.b) Como el $rango(A)=4$ (observamos que si permutamos las filas 1 y 2, la matriz es triangular superior, por lo que es inmediato calcular su rango o su determinante), resulta que $dim(\mathbf{Im}(f))=4$, es decir $\mathbf{Im}(f)=\mathbb{R}^4$, por lo que f será suprayectiva. Además podemos asegurar que $dim(\mathbf{ker}(f))=0$, por lo que f será también inyectiva (no es preciso calcular $\mathbf{ker}(f)$, ya que al tener dimensión 0, obligatoriamente $\mathbf{ker}(f)=\{(0,0,0,0)\}$).

(4.c) En este caso se trata de usar el siguiente esquema (solo hay que realizar un cambio de base en el conjunto inicial):

$$\underset{B}{\mathbb{R}^4}\ --> \underset{C}{\mathbb{R}^4}\to\underset{C}{\mathbb{R}^4}$$

por lo que la nueva matriz pedida será

$$M_{B,C}(f)=M_{C,C}(f)\times M_{B,C}=A\times M_{B,C}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&1&-5/4\\2&1&2&1/2\\0&0&-1&3/4\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{4}&\frac{9}{4}\\4&2&-\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\\-1&\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}\\0&4&2&-2\end{pmatrix}$$

5. (1er parcial, Febrero 2015) *Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios*

$$V=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ :\ x-z=0;\ x+y+z=0\right\}\quad \text{y}\quad W=<(1,-1,1,0),(0,1,0,1)>$$

y sea $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ el endomorfismo que verifica:

$$\ker(f)=V;\qquad f(1,0,0,0)=(1,0,1,1),\qquad f(0,1,0,0)=(1,-2,1,-1)$$

5.a *Calcular la matriz asociada a f en bases canónicas.*

5.b *Probar que* $\mathrm{Im}(f)=W$*, y clasificar f.*

5.c *Dada la nueva base $B=\{(1,2,0,0),(-1,0,2,0),(0,-1,0,2),(0,2,-1,0)\}$, hallar la matriz de f en dicha base, $M_{B,B}(f)$. NOTA: Se puede dejar indicado como producto de* *matrices sin tener que obtener matrices inversas.*

Solución:

(5.a) Al ser $f(1,0,0,0) = (1,0,1,1)$ y $f(0,1,0,0) = (1,-2,1,-1)$, ya conocemos las dos primeras columnas de la matriz pedida. Puesto que

$$\ker(f) = V = \{(z,-2z,z,t)\} =< (0,0,0,1),(1,-2,1,0) >,$$

en particular se tiene que $f(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$ (por lo que también conocemos la cuarta columna). Así, será

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -2 & b & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ 1 & -1 & d & 0 \end{pmatrix}$$

y la 3ª columna la obtendremos de exigir que $f(1,-2,1,0) = (0,0,0,0)$, de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(5.b) El subespacio $\mathrm{Im}(f)$ está generado por las columnas de A, y como el rango de esta matriz es 2 (podemos eliminar la 3ª fila y la 4º columna; mientras que la 1ª fila es la resta de la 4ª y 2ª) podemos poner

$$\mathrm{Im}(f) =< (1,0,1,1),(1,-4,1,-3) >$$

Para comprobar entonces que $\mathrm{Im}(f) = W =< (1,-1,1,0),(0,1,0,1) >$, nos bastará con ver que la matriz que forman los siguientes 4 vectores (los dos que hemos obtenido para $\mathrm{Im}(f)$ y los dos que nos generan W según el enunciado) tiene rango 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(lo que es inmediato, ya que tiene dos columnas iguales y la fila 1º es suma de la 3ª y 4ª).

Como $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$, tendremos que $\dim(\ker f) = 2$, por lo que f ni es inyectiva ni es suprayectiva.

(5.c) Aplicando el conocido esquema, resulta ser

$$M_{B,B}(f) = M_{C,B} \times A \times M_{B,C} = M_{B,C}^{-1} \times A \times M_{B,C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{11}{12} & -\frac{7}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{23}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{29}{6} & \frac{11}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

aunque en el examen no se pedía que se calculase este producto.

6. (1er parcial, Febrero 2016) *Sea* $\mathbb{R}_2[x]$ *el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que* 2*, y se considera la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ *que a cada polinomio* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *le asigna el vector* $(p(0), p(1), p(2), p(3))$*. Se pide:*
   - 6.a *Calcular la matriz asociada a* f *en las respectivas bases canónicas (Considerar* $\{1, x, x^2\}$ *como la base canónica de* $\mathbb{R}_2[x]$*).*
   - 6.b *Obtener el valor de* $f(2x^2 - x + 1)$*.*
   - 6.c *Hallar* $\ker(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$*. Clasificar* f*.*

Solución:

(6.a) La 1ª columna de la matriz viene dada por las imágenes del 1er vector de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ (y lo mismo para la 2da y 3ra columna). Así, y como

$$\text{Si } p(x) = 1 \Rightarrow f((1)) = (p(0), p(1), p(2), p(3)) = (1, 1, 1, 1)$$
$$\text{Si } p(x) = x \Rightarrow f((x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3)) = (0, 1, 2, 3)$$
$$\text{Si } p(x) = x^2 \Rightarrow f((x^2)) = (p(0), p(1), p(2), p(3)) = (0, 1, 4, 9)$$

la matriz viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(6.b) Se tiene que

$$f(2x^2 - x + 1) = (p(0), p(1), p(2), p(3)) = (1, 2, 7, 16)$$

que es el mismo resultado que si hacemos

$$f(2x^2 - x + 1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(6.c) Sabemos que

$$\mathrm{Im}(f) = < (1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 3), (0, 1, 4, 9) >$$

y como estos 3 vectores son linealmente independientes, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

De esta forma, y puesto que

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$$

habrá de ser $\ker(f) = \{0\}$; por lo que f será inyectiva y no es suprayectiva (ya que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \neq \dim \mathbb{R}^4 = 4$).

Ejercicios propuestos.

1. Estudiar cuales de las siguientes aplicaciones $f : U \to V$ son lineales:
   a. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^4$, dada por $f(x,y,z) = (z, x+y, -z, y-x)$.
   b. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y,z) = (x+y+z, 0)$.
   c. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y,z) = (z, x+y, -z)$.
   d. $U = \mathbb{R}^4, V = \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y,z,t) = (x-3y+8t, 2x)$.
   e. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, z)$.
   f. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y,z) = (x-y+2z, y-z, x+2z)$.
   g. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = x-2y+3z$.
   h. $U = V = \mathbb{R}_3[x]$ (polinomios de grado menor o igual que 3), dada por $f(p(x)) = xp'(x)$.
   i. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3$, dada por $f(x,y,z) = (x, 1, y)$.
   j. $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2$, dada por $f(x,y,z) = (x^2, y+z)$.

2. En los casos del ejercicio anterior en los que la aplicación sea lineal, calcular bases para el núcleo ($ker(f)$) y la imagen ($Im(f)$) y decir si la aplicación correspondiente es inyectiva y/o suprayectiva.

3. Sea $B = \{u, v\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que cumple $f(u) = 5u + 2v$; $f(v) = 3u - v$. Hallar la matriz asociada a f respecto de la base B.

4. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple $f(1,0) = (2,3,-1)$ y $f(0,1) = (0,-2,3)$. Obtener las siguientes matrices asociadas: $M_{C_2,C_3}(f)$, $M_{B,C_3}(f)$ y $M_{C_2,B'}(f)$, siendo C_2 la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y C_3 la base canónica de $\mathbb{R}^3$. mientras que las bases B y B' vienen dadas por
$$B = \{(-1,2),(3,0)\};\ B' = \{(0,0,-1),(0,2,1),(-1,1,4)\}$$

5. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Hallar la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

6. Hallar la matriz asociada respecto de las bases canónicas de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que cumple $f(2,0,-1) = (5,3)$, $f(0,1,-3) = (-4,5)$ y $f(-2,3,0) = (-9,4)$.

7. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justificando la respuesta):
   a. Existe una aplicación lineal inyectiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuyo núcleo es
$$\ker(f) = \left\{(x,y,z);\ x-y+z = 0\right\}$$

b. Existe un endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que respecto de ciertas bases B y B' tiene por matrices asociadas

$$M_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M_{B',B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. El endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de ciertas bases es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

es biyectivo.

8. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+3 & 4 \\ 1 & a+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica:

a. Determinar razonadamente los valores de a para los cuales f^{-1} es aplicación (valores de a para los cuales A es invertible). ¿Cual sería la matriz asociada a f^{-1} respecto de la base canónica? Obtenerla para el caso $a = -2$.

b. Para $a = -1$, calcular $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$, dando ecuaciones y bases y la dimensión de estos subespacios.

c. Discutir, según los valores de a y b, si existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f(x,y,z) = (1,2b,b)$.

9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)\}$ y sea $C_3 = \{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica.

a. Obtener las matrices de cambio de base de C_3 a B y de B a C_3.

b. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(u_1) = u_1 + u_2$; $f(u_2) = u_1 + u_3$; $f(u_3) = u_2 - u_3$. Hallar la matriz de dicho endomorfismo referida a la base B y la matriz referida a la base canónica C_3. ¿Existe alguna relación entre ambas matrices? En caso afirmativo, expresar dicha relación.

c. Si $v = e_1 + 2e_2 - e_3$, hallar su imagen y expresarla en ambas bases.

10. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,-1)\}$ y sea un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & x \end{pmatrix}$$

a. Calcular x para el cual f no es suprayectiva.

Para dicho valor de x :

b. Calcular la expresión analítica de f y su matriz respecto de la base canónica.

c. Calcular bases para $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$. ¿Es f inyectiva?

d. Calcular las coordenadas de $f(1,1,1)$ respecto de la base B.