Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 4.1.1: TEORÍA DE CONJUNTOS Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Conjuntos.
Leyes de composición.
Grupos. **Grupos abelianos**.
Anillos.
Cuerpos.
Otras estructuras.

Conjuntos.

Un **conjunto** es la reunión en un todo de determinados objetos diferenciables unos de otros. A los objetos que forman un conjunto se les llama **elementos** del conjunto.

Example *Algunos conjuntos son* $\{1,2,3\}$, $\{a,b,c\}$, $\{5,2,8,125\}$*, el conjunto de los números pares, el conjunto de las personas de una ciudad, etc.*

Así, en el primer conjunto de los anteriores, diremos que 1 es un **elemento** del conjunto y escribiremos $1 \in \{1,2,3\}$ (se lee "1 pertenece al conjunto $\{1,2,3\}$"). Análogamente $2,3 \in \{1,2,3\}$. Si queremos decir que algo no pertenece al conjunto basta usar el símbolo $\notin$; por ejemplo $4 \notin \{1,2,3\}$.

Un conjunto puede describirse enumerando sus elementos (éstos suelen ponerse entre llaves separados por comas, como ocurre con los tres primeros casos anteriores) o definiéndolo por las propiedades que verifican sus elementos (como ocurre con los últimos 2 casos anteriores). Si un conjunto consta de un número finito de elementos se dice que es un conjunto **finito** y si no, se dice que es **infinito**.

Se llama **conjunto vacío** al que no tiene ningún elemento, y se designa por $\emptyset$.

Sean A y B conjuntos. Diremos que B es un **subconjunto** de A, cuando todos los elementos de B están en A. Esto lo denotaremos por $B \subseteq A$ (se lee "B está contenido en A"). Si queremos decir que el conjunto B no es un subconjunto de A escribiremos $B \subsetneq A$. (A veces se utiliza $\subset$ en vez de $\subseteq$ para designar la inclusión)

Dados dos conjuntos A y B, para comprobar que son iguales ($A = B$) hay que ver que ambos tienen exactamente los mismos elementos. Para demostrar esto, lo que se hará en la mayoría de las ocasiones será observar que se verifican las dos inclusiones, es decir, que $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$.

Sean A y B conjuntos. Se denomina **unión** de A y B al conjunto cuyos elementos cumplen, cada uno de ellos, la propiedad de estar o bien en A o bien en B. Este nuevo conjunto se denotará $A \cup B$ (se lee "A unión B"). De modo matemático podríamos expresarlo así

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Se denomina **intersección** de A y B al conjunto cuyos elementos cumplen, cada uno de ellos, la propiedad de estar tanto en A como en B. Este nuevo conjunto se denotará $A \cap B$ (se lee ”A intersección B”). De modo matemático podríamos expresarlo así

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Se llama **diferencia** de A por B al conjunto formado por los elementos que están en A pero no en B. Se denota por $A - B$ (también se denota $A \backslash B$). De modo matemático podríamos expresarlo así

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Example *Dados los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,4,6\}$, se tiene que*

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6\},\ A \cap B = \{2\},\ A - B = \{1,3\} \text{ y } B - A = \{4,6\}$$

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B se denota por $A \times B$, y es el conjunto de los ”pares” de elementos de A y de B, es decir

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

La definición se extiende de forma natural para cualquier número de conjuntos. En el caso de que hagamos el producto cartesiano de un conjunto A consigo mismo n veces utilizaremos la notación A^n para denotar

$$A^n = A \times \ldots \times A$$

como ocurrirá por ejemplo con $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, y en general con $\mathbb{R}^n$. En estos casos, a sus elementos los denominamos **vectores** (de 2, 3, o en general, de n componentes).

Algunos conjuntos numéricos destacables son los siguientes:

Example *- El conjunto de los números* ***naturales*** $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$, *aunque habitualmente se suele tomar como conjunto de los números naturales el dado por*

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1,2,3,\ldots\}$$

que será el que habitualmente consideremos nosotros (a no ser que se nos indique lo contrario).

- El conjunto de los números ***enteros***

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$$

Es claro que todo número natural es un número entero.

- El conjunto de los números ***racionales*** *o* ***fraccionarios***

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, \text{ con } n \neq 0\right\}$$

Este conjunto incluye a todos los conjuntos anteriores (naturales y enteros), así como a todos los números decimales periódicos o con una cantidad finita de decimales; debemos de conocer como dado uno de estos números, éste puede ponerse como una fracción.

- El conjunto de los números ***reales*** *$\mathbb{R}$, algo más difícil de dar explícitamente, que podríamos verlo como el conjunto de los números decimales, tanto los periódicos como los no periódicos. Serían ejemplos de números reales, aparte de todos los números racionales, algunos que no lo son, como $\sqrt{2} = 1.41421.....$, $log25 = 2.32192.....$, y otros tantos números que tienen infinitos decimales, pero no pueden darse con una expresión que se repita periódicamente (como, por ejemplo, $\pi = 3.1415...$ o $e = 2.718...$).*

También tenemos los conjuntos (número reales positivos y números reales negativos, respectivamente) dados por

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} |\, x > 0\} \text{ y } \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} |\, x < 0\}$$

A los números reales que no son racionales se les llama números ***irracionales****. El conjunto de los números irracionales se representa por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.*

- El conjunto de los números ***complejos***

$$\mathbb{C} = \{a + b\mathbf{i} |\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

donde se considera **i** *como la raíz cuadrada de -1, $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Algunos números complejos serían los siguientes: $2 + 3\mathbf{i}$, $-3 + \mathbf{i}$, $-2\mathbf{i}$, etc. Es claro que todo número real x es un número complejo pues $x = x + 0\mathbf{i}$.*

De la definición de los conjuntos numéricos anteriores se deduce que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Leyes de composición.

Definition *Dado un conjunto A, se llama* ***ley de composición interna (LCI)*** *a toda aplicación*

$$\otimes : A \times A \to A$$

$$(a, b) \mapsto a \otimes b$$

Una ley de composición interna es aquella operación que se define sobre un conjunto A y que hace que la operación entre dos elementos de A nos dé otro elemento de A. Por ejemplo, en el conjunto $A = \mathbb{N}$ de los números naturales, la operación $\otimes = +$ (suma de dos números naturales) es una ley de composición interna LCI (ya que si sumamos dos números naturales, obtenemos otro número natural); análogamente, la diferencia entre dos números naturales no tiene porqué ser LCI (por ejemplo, 3 y 5 son números naturales, pero $3 - 5$ no es un número natural).

Definition *Dados dos conjuntos A y B, se llama* ***ley de composición externa (LCE)*** *sobre A, a toda aplicación*

$$\ominus : B \times A \to A$$

$$(a, b) \mapsto a \ominus b$$

*A los elementos de B se les suele llamar **escalares**.*

Notemos que una LCE sobre A es aquella operación que al operar un elemento de B con un elemento de A, da como resultado un elemento de A. Por ejemplo, tomemos $A = \mathbb{R}^2$ y $B = \mathbb{R}$, la operación consistente en multiplicar elementos de A (que son pares de números) por elementos de B (números), da como resultado un par de números, por lo que será una LCE.

Grupos. Grupos abelianos.

Definition *Se llama **grupo** al par formado por un conjunto G y por una LCI* $\otimes$, $(G, \otimes)$, *que verifica las propiedades:*

a) Asociativa .

b) Existencia de elemento neutro.

c) Existencia de elemento simétrico.

*Si además se verifica la propiedad conmutativa, se dice que el grupo es **abeliano**.*

Example *Cualquiera de los conjuntos numéricos que hemos visto en la primera sección de este tema, con la operación suma, son grupos abelianos.*

La suma de matrices cuadradas de un orden determinado, da lugar a un grupo abeliano. Sin embargo, y como el producto de matrices no es conmutativo, esta operación no da lugar a un grupo abeliano.

Anillos.

Definition *Llamaremos **anillo** a todo conjunto no vacio G, dotado de dos leyes de composición interna* $\otimes_1$ *y* $\otimes_2$, $(K, \otimes_1, \otimes_2)$, *que verifican las propiedades:*

a) $(G, \otimes_1)$ *es un grupo abeliano.*

b) La LCI $\otimes_2$ *verifica la propiedad asociativa.*

c) Se verifica la propiedad distributiva.

Si además $\otimes_2$ *verifica la propiedad conmutativa, se llama **anillo conmutativo**.*

Example *Razonar el porqué* $\mathbb{R}$ *es un anillo conmutativo con las LCI* $\otimes_1 = +$ *(suma de dos números reales) y* $\otimes_2 = \cdot$ *(producto de dos números reales).*

Example *El conjunto de matrices cuadradas de orden* 2 *y coeficientes reales, con las operaciones* $\otimes_1 = +$ *(suma de dos matrices) y* $\otimes_2 = \cdot$ *(producto de dos matrices) es un anillo, pero no es conmutativo.*

Cuerpos.

Definition *Llamaremos **cuerpo** a todo conjunto no vacio K, dotado de dos leyes de composición interna* $\otimes_1$ *y* $\otimes_2$, $(K, \otimes_1, \otimes_2)$, *que verifican las propiedades:*

a) $(K, \otimes_1, \otimes_2)$ *es un anillo.*

b) La LCI $\otimes_2$ *verifica que tiene elemento neutro.*

c) Todo elemento no nulo de K tiene elemento inversible para la LCI $\otimes_2$.

*Se dice que el cuerpo K es **conmutativo**, si el anillo* $(K, \otimes_1, \otimes_2)$ *lo es.*

Example *Los conjuntos* $K = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ *son cuerpos conmutativos con las operaciones* $\otimes_1 = +$ *(suma de números reales o complejos),* *y* $\otimes_2 = \cdot$ *(producto de números reales o complejos).*

Otras estructuras.

Existen otras muchas estructuras algebraicas, como son **espacios vectoriales**, **espacios métricos**, **espacios vectoriales normados**, **espacios vectoriales euclídeos**, etc., algunos de los cuales serán introducidos en los temas siguientes.