Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

ANEXO 3.4: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción.
Sistemas de ecuaciones diferenciales. **Definiciones**.
Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales
Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:
Sistemas homogéneos.
Sistemas no homogéneos. El método de variación de constantes.

Introducción.

En el campo de las ecuaciones diferenciales, una rama de gran utilidad es la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Vamos a comenzar con un sencillo ejemplo, que nos servirá de introducción:

Example *Consideremos el sistema formado por dos ecuaciones diferenciales con dos variables dependientes* u, v, *y sea* t *la variable independiente (es decir,* $u = u(t), v = v(t)$*):*

$$\begin{cases} u' = a \cdot u \\ \\ v' = b \cdot v \end{cases}$$

Podemos observar que, en este sistema, cada ecuación es totalmente independiente de la otra. Por ello, pueden resolverse por separado, y sabemos que la solución viene dada por

$$u = c_1 e^{at}, \qquad v = c_2 e^{bt}$$

Remark *Es interesante considerar una notación matricial para estudiar este tipo de sistemas, ya que se va a simplificar sustancialmente la escritura, y encontraremos una notación similar al caso de una edo de 1er orden. Para ello, dada una matriz diagonal (con posterioridad veremos qué ocurre si no es diagonal)*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

veremos más adelante que se denotará por e^M a la matriz dada por

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Así, en el ejemplo anterior podremos expresar el sistema en la forma

$$X' = AX$$

donde

$$X' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Y de este modo la solución podrá expresarse en la forma

$$X = Ce^{AT}$$

siendo

$$T = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales. Definiciones.

Definition *Llamaremos **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** a una expresión de la forma*

$$\begin{cases} F_1(x,y_1,y_1',y_2,y_2',\dots,y_m,y_m') = 0 \\ F_2(x,y_1,y_1',y_2,y_2',\dots,y_m,y_m') = 0 \\ \dots \\ F_m(x,y_1,y_1',y_2,y_2',\dots,y_m,y_m') = 0 \end{cases}$$

donde $y_1, y_2, \dots, y_m$ son funciones reales a determinar que dependen de la variable x. Siempre consideraremos el caso en el que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas. En particular, estaremos interesados en aquellos sistemas que se pueden expresar de la forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_m) \\ y_2' = f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_m) \\ \dots \\ y_m' = f_m(x,y_1,y_2,\dots,y_m) \end{cases}$$

Ejemplos de estos sistemas serían:

$$\begin{cases} y_1' = x \cdot y_1 + y_2^2 \\ \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = x \cdot y_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \cdot y_3 \\ y_3' = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \end{cases}$$

En general, la resolución de estos sistemas no es posible salvo en casos excepcionales. Sólo para el caso de sistemas de edo lineales con coeficientes constantes, que veremos un poco más tarde, existen algoritmos que permitirán el cálculo explícito de las soluciones. Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuando un sistema tiene solución, o más precisamente cuando un problema de condiciones iniciales tiene solución:

Definition *Llamaremos* ***problema de condiciones iniciales*** *para un sistema de edo a toda expresión de la forma*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \ldots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, \ldots y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

siendo $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *números reales.*

Por ejemplo,

$$\begin{cases} y_1' = x \cdot y_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \cdot y_3 \\ y_3' = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

es un problema de condiciones iniciales, mientras que

$$\begin{cases} y_1' = x \cdot y_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \cdot y_3 \\ y_3' = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \\ y_1(0) = 2, y_2(1) = 0, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

no sería un problema de condiciones iniciales, ya que no conocemos a todas las funciones incógnita en el mismo punto $x_0 = 0$.

Para el caso de problemas de condiciones iniciales, se tiene el siguiente resultado (análogo al de edo de orden uno):

Theorem *Dado el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \ldots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \\ y_1(x_0) = y_1,\ y_2(x_0) = y_2, \ldots, y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

donde $(x_0, y_1, y_2, \ldots, y_m) \in A$, *y* $f_i : A \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas en el abierto A. Supongamos además que las funciones* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *existen y son continuas en A. Entonces existe una solución del problema de condiciones iniciales anterior* $y_i : I \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, *definido en un intervalo abierto I de la recta real.*

Este resultado es fácil de aplicar. Por ejemplo, el problema anterior

$$\begin{cases} y_1' = x \cdot y_1 + y_2^2 - y_3 \\ y_2' = x + y_1 + y_2 \cdot y_3 \\ y_3' = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1 \end{cases}$$

tiene solución única, aunque no tengamos ni idea de como calcularla. En la asignatura de Métodos Numéricos (4^o de Ing. Industrial) se verá como obtener soluciones aproximadas así como obtener información parcial sobre el sistema incluso sin conocer las soluciones.

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Para este tipo de sistemas, y como hemos comentado anteriormente, vamos a poder encontrar su solución en algunos casos particulares.

Definition *Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es toda expresión de la forma*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

Si denotamos por

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y por

$$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T, \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$$

el sistema anterior puede escribirse en la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

Definition *Un sistema se dirá **homogéneo** si* $\mathbf{b}(x) = (0,0,\ldots,0)$*, y en caso contrario se dirá **no homogéneo**.*

Definition *Un sistema se dirá de **coeficientes constantes** si la matriz* $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$ *es constante.*

Example *El sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2 \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

es de coeficientes constantes, pero no es homogéneo ($\mathbf{b}(x) = (1, e^{-x})$*), mientras que el sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

es homogéneo de coeficientes constantes.

Antes de pasar al estudio de sistemas lineales de coeficientes constantes (para los que sí vamos a obtener su solución), veamos algunos resultados generales sobre los sistemas lineales:

Theorem *Dado el sistema* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$*, donde* $\mathbf{A}(x)$ *y* $\mathbf{b}(x)$ *están definidas y son continuas en un intervalo* $I = [x_0 - a, x_0 + a]$*, se verifica que el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

tiene solución única definida en I.

Nos centraremos ahora en el estudio de los sistemas homogéneos:

Theorem *El conjunto de soluciones del sistema homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$*, es decir que cualquier solución* $\mathbf{y}(x)$ *del mismo es de la forma*

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + \ldots + c_n \cdot \mathbf{y}_n$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ *son soluciones linealmente independientes del mismo.*

Aunque el resultado anterior caracteriza las soluciones del sistema homogéneo, el cálculo explícito de las soluciones dista mucho de estar al alcance. Un primer avance en el cálculo de las soluciones lo proporciona el determinante wronskiano:

Definition *Dadas* $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *se define su determinante* ***wronskiano*** *como la función real* $W[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n] : I \to \mathbb{R}$ *definida para todo* $x \in I$ *como*

$$W[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n](x) = |\mathbf{y}_1(x);\mathbf{y}_2(x);\ldots;\mathbf{y}_n(x)|$$

Este determinante resulta útil a la hora de determinar si n soluciones del sistema homogéneo son o no linealmente independientes:

Theorem *Dadas* $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *soluciones del sistema homogéneo* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y}$, *son equivalentes:*

a) $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n$ *son linealmente independientes.*

b) $W[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n](x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$.

c) Existe $x_0 \in I$ *tal que* $W[\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n](x_0) \neq 0$.

La teoría general, en lo que a la estructura de las soluciones se refiere, quedará cerrada con la siguiente caracterización de los sistemas no homogéneos:

Theorem *El conjunto de soluciones del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

es de la forma

$$\mathbf{y} = c_1 \cdot \mathbf{y}_1 + c_2 \cdot \mathbf{y}_2 + \ldots + c_n \cdot \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p$$

donde $c_1,c_2,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_n$ *son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo e* $\mathbf{y}_p$ *es una solución particular del problema no homogéneo.*

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Vamos a resolver sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de coeficientes constantes, $\mathbf{b}(x) = (b_1(x),b_2(x),\ldots,b_n(x))^T$ es un vector columna formado por funciones reales y continuas en un intervalo real I e $\mathbf{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$. Comenzaremos por la resolución de sistemas homogéneos:

Sistemas homogéneos.

Vamos a introducir un método matricial para la resolución de sistemas homogéneos con coeficientes constantes, es decir, sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

Dicho método está basado en el cálculo de la exponencial de una matriz usando el teorema de Cayle-Hamilton (ya estudiado en el tema de Diagonalización de Matrices). Si recordamos brevemente lo que dice dicho teorema:

Theorem ***(Cayle-Hamilton)*** *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada y sea* $p(x)$ *su polinomio característico. Entonces* $p(\mathbf{A}) = 0$.

Example *Sea* $\mathbf{A}$ *la matriz dada por*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $p(x) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 5\lambda - 2$. *Lo que viene a decir el teorema anterior es que*

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

cosa que puede comprobarse sin dificultad.

Volvemos a retomar ahora el Ejemplo 1 con el que comenzábamos este capítulo. Como vimos en el mismo, va a jugar un papel fundamental la función exponencial. Pero para generalizar al caso de matrices cuadradas no diagonales, vamos a hacer algunas consideraciones sobre como se calcula la **exponencial de una matriz**:

La exponencial de una matriz.

Sabemos que la función exponencial viene definida por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por ello, si **A** es una matriz cuadrada, vamos a definir la **exponencial de la matriz** *A* como

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n$$

Hay casos en los que es muy sencillo calcular la exponencial de una matriz. Por ejemplo, si tenemos una matriz diagonal $\mathbf{D} = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, se demuestra, sustituyendo en la expresión anterior, que

$$e^{\mathbf{D}} = diag(e^{d_1}, e^{d_2}, \ldots, e^{d_n})$$

Example *Si*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

Además, la exponencial de una matriz cumple las siguientes propiedades:

- Si **A** y **B** son matrices cuadradas que conmutan (es decir, que verifican $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$), entonces

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$$

- La solución del sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

viene dada por

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{C} \cdot e^{\mathbf{A}x}$$

ya que se verifica que $\mathbf{y}' = \frac{d}{dx}(\mathbf{C} \cdot e^{\mathbf{A}x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(x)$.

En base a este último resultado ya conocemos lo que tenemos que hacer para resolver el sistema homogéneo, siendo la única ”pega” el que no sabemos calcular la exponencial de una matriz cuadrada cualquiera. Es decir, sabemos que la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

viene dada por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

pero ¿cómo calculamos $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x}$? A continuación vamos a ver un método basado en el teorema de Cayle-Hamilton que permite hacer el cálculo con cierta facilidad, aunque los cálculos sean laboriosos.

Cálculo práctico de la exponencial.

Para fijar ideas, supongamos que $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ y que tiene k raíces reales o complejas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ con multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Buscamos entonces polinomios $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)$ con grado a lo sumo $r_i - 1$ para cada $1 \leq i \leq k$, de manera que se verifique la igualdad

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1(x)}{(x-\lambda_1)^{r_1}} + \frac{a_2(x)}{(x-\lambda_2)^{r_2}} + \ldots + \frac{a_k(x)}{(x-\lambda_k)^{r_k}}$$

de donde

$$1 = a_1(x)q_1(x) + a_2(x)q_2(x) + \ldots + a_k(x)q_k(x)$$

con $q_i(x) = p(x)/(x-\lambda_i)^{r_i}$, $1 \leq i \leq k$. Sustituyendo en la expresión anterior x por $\mathbf{A}$, tendremos

$$\mathbf{I}_n = a_1(\mathbf{A})q_1(\mathbf{A}) + a_2(\mathbf{A})q_2(\mathbf{A}) + \ldots + a_k(\mathbf{A})q_k(\mathbf{A})$$

Como se tiene para todo $1 \leq i \leq k$,

$$e^{\lambda_i x \cdot \mathbf{I}_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{I}_n^j \cdot \frac{(\lambda_i x)^j}{j!} = e^{\lambda_i x} \cdot \mathbf{I}_n$$

entonces

$$e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_i x \cdot \mathbf{I}_n} e^{(\mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I}_n) \cdot x} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!}$$

De aquí, multiplicando por la izquierda ambos miembros por $q_i(\mathbf{A})$

$$q_i(\mathbf{A})e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{r_i - 1} q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!}$$

dado que por el teorema de Cayle-Hamilton, se tiene que $q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j = p(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^{j-r_i} = \mathbf{0}$. Multiplicando nuevamente por la izquierda por $a_i(\mathbf{A})$

obtendremos

$$a_i(\mathbf{A})q_i(\mathbf{A})e^{\mathbf{A}x} = e^{\lambda_i x} \cdot \sum_{j=0}^{r_i-1} a_i(\mathbf{A})q_i(\mathbf{A})(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!}$$

Sumando entonces esta última expresión desde 1 hasta k, y teniendo en cuenta la expresión obtenida anteriormente para $\mathbf{I}_n$, se llega a que la exponencial de una matriz puede calcularse por la fórmula

$$e^{\mathbf{A}x} = \sum_{i=1}^{k} \left(e^{\lambda_i x} \cdot a_i(\mathbf{A})q_i(\mathbf{A}) \sum_{j=0}^{r_i-1} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^j \cdot \frac{x^j}{j!} \right)$$

Example *Consideremos el sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico

$$p(x) = x^2 - 7x + 6$$

que tiene por raíces $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 6$.

Calculamos ahora a_1 *y* a_2 *a partir de*

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-6} = \frac{(a_1 + a_2)x - 6a_1 - a_2}{p(x)}$$

obteniéndose que $a_1 = -1/5$, $a_2 = 1/5$. *Además, se obtiene*

$$q_1(x) = \frac{p(x)}{x-1} = x - 6, \qquad q_2(x) = \frac{p(x)}{x-6} = x - 1$$

Si aplicacamos ahora la última fórmula anterior, se tiene que

$$e^{\mathbf{A}x} = e^x\left(-\frac{1}{5}\mathbf{I}_2\right) \cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A} - 6\mathbf{I}_2) + e^{6x}\left(\frac{1}{5}\mathbf{I}_2\right) \cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix}$$

La solución del sistema será por lo tanto

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$y_1(x) = \frac{1}{5}(e^{6x}(3c_1 + 2c_2) + e^x(2c_1 - 2c_2))$$

e

$$y_2(x) = \frac{1}{5}(e^{6x}(3c_1 + 2c_2) + e^x(-3c_1 + 3c_2))$$

siendo c_1 *y* c_2 *constantes reales. Si tuviésemos alguna condición inicial, por ejemplo* $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, *plantearíamos un sistema de donde resultaría* $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, *por lo que la única solución del problema de condiciones iniciales sería*

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \frac{1}{5}(3e^{6x} + 2e^{x}) \\
y_2(x) &= \frac{1}{5}(3e^{6x} - 3e^{x})
\end{aligned}
$$

Example *Consideremos ahora el sistema*

$$
\begin{cases}
y_1' = 3y_1 + y_2 \\
y_2' = -y_1 + y_2
\end{cases}
$$

cuyo polinomio característico asociado a la matriz $\mathbf{A}$ *es* $p(x) = x^2 - 4x + 4,$ *que tiene por solución la raíz doble* $\lambda = 2$*. Entonces*

$$
\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{(x-2)^2} = \frac{a_1}{p(x)}
$$

de donde $a_1 = 1$ *y*

$$
q_1(x) = \frac{p(x)}{(x-2)^2} = 1
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}x} &= e^{2x} a_1(\mathbf{A}) q_1(\mathbf{A}) \sum_{i=0}^{1} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2)^i \cdot \frac{x^i}{i!} \\
&= e^{2x} \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_2 \left(\mathbf{I}_2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \right) = \\
&= e^{2x} \begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

con lo que la solución del sistema vendrá dada por

$$
\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+x)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1+x)e^{2x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}
$$

Example *Si tomamos el sistema*

$$
\begin{cases}
y_1' = 3y_1 - 5y_2 \\
y_2' = y_1 - y_2
\end{cases}
$$

su polinomio característico asociado a la matriz $\mathbf{A}$ *es* $p(x) = x^2 - 2x + 2,$ *que tiene por solución la raíces complejas conjugadas* $\lambda_1 = 1 + i,\ \lambda_2 = 1 - i$*. Entonces*

$$
\frac{1}{p(x)} = \frac{a_1}{x-1-i} + \frac{a_2}{x-1+i}
$$

de donde $a_1 = \frac{1}{2i}$ *y* $a_2 = -\frac{1}{2i}$*. Teniendo en cuenta que*

$$
q_1(x) = x - 1 + i, \qquad q_2(x) = x - 1 - i
$$

tendremos

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}x} &= e^{(1+i)x}\frac{1}{2i}\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A}-(1-i)\mathbf{I}_2) - e^{(1-i)x}\frac{1}{2i}\cdot \mathbf{I}_2(\mathbf{A}-(1+i)\mathbf{I}_2) \\ &= e^x\left(e^{ix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{pmatrix} - e^{-ix}\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}\right) \\ &= e^x\begin{pmatrix} 2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} & -5\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\ \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} & -2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \end{pmatrix} \\ &= e^x\begin{pmatrix} 2\operatorname{sen}x+\cos x & -5\operatorname{sen}x \\ \operatorname{sen}x & -2\operatorname{sen}x+\cos x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dado que se verifica

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad y \qquad \operatorname{sen}x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Entonces toda solución del sistema viene dada por

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^x\begin{pmatrix} 2\operatorname{sen}x+\cos x & -5\operatorname{sen}x \\ \operatorname{sen}x & -2\operatorname{sen}x+\cos x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Remark *Los 3 ejemplos anteriores resumen los casos que pueden darse para el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Cuando el número de ecuaciones es mayor, pueden aparecer otros casos, pero básicamente la matriz exponencial tiene en sus coordenadas funciones de la forma*

$$x^n e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad y \qquad x^n e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Sistemas no homogéneos. **El método de variación de constantes**.

Volvamos ahora sobre el sistema no homogéneo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{b}(x)$$

y supongamos conocida la solución general del sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}$$

Para terminar de resolver el sistema no homogéneo usaremos **el método de variación de constantes**. Para ello supongamos que la solución es de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x}\cdot\mathbf{C}(x)$$

donde $\mathbf{C}(x)$ es una función a determinar. Derivando respecto a x obtendremos

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x}\cdot\mathbf{C}(x)+e^{\mathbf{A}x}\cdot\mathbf{C}'(x) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}(x) + e^{\mathbf{A}x}\cdot\mathbf{C}'(x)$$

Sustituyendo en el sistema no homogéneo, tendremos

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}(x) + e^{\mathbf{A}x}\cdot\mathbf{C}'(x) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x)$$

lo que implica que

$$e^{\mathbf{A}x}\cdot\mathbf{C}'(x) = \mathbf{b}(x)$$

Al ser la matriz $e^{\mathbf{A}x}$ invertible, y teniendo en cuenta que

$$e^{\mathbf{A}x}\cdot e^{-\mathbf{A}x} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}_n$$

concluimos que $e^{-\mathbf{A}x}$ es la inversa de $e^{\mathbf{A}x}$ y entonces

$$\mathbf{C}(x) = \int e^{-\mathbf{A}x}\cdot\mathbf{b}(x)dx$$

Una vez calculada $\mathbf{C}(x)$ obtenemos la solución del sistema no homogéneo.

Example *Si consideramos el sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + e^x \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

que también podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya vimos que la exponencial de la matriz del sistema era

$$e^{\mathbf{A}x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix}$$

por lo que al ser

$$\mathbf{C}(x) = \int e^{-\mathbf{A}x} \cdot \mathbf{b}(x)dx$$

resulta

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \begin{pmatrix} 3e^{-5x} + 2 \\ 3e^{-5x} - 3 \end{pmatrix} dx = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \int(3e^{-5x} + 2)dx \\ \int(3e^{-5x} - 3)dx \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}e^{-5x} + 2x + c_1 \\ -\frac{3}{5}e^{-5x} - 3x + c_2 \end{pmatrix}$$

con lo que la solución es

$$\mathbf{y}(x) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}e^{-5x} + 2x + c_1 \\ -\frac{3}{5}e^{-5x} - 3x + c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3e^{6x} + 2e^x & 2e^{6x} - 2e^x \\ 3e^{6x} - 3e^x & 2e^{6x} + 3e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{e^x}{25}\begin{pmatrix} 10x - 3 \\ 3 - 15x \end{pmatrix}$$

Notemos que una solución particular del sistema es

$$\mathbf{y}_p(x) = \frac{e^x}{25}\begin{pmatrix} 10x - 3 \\ 3 - 15x \end{pmatrix}$$

por lo que haciendo $k_1 = c_1/5, k_2 = c_2/5$, tenemos que

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \mathbf{y}_p(x)$$

tal y como afirmaba el teorema ya conocido.

Example *Si consideramos ahora el problema de condiciones iniciales*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = 4y_1 + 2y_2 + e^x \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \\ \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1 \end{array}\right.$$

se verificará que

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

de donde $c_1 = 3$ *y* $c_2 = 22,$ *de donde sustituyendo en la solución general concluimos que*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 13e^{6x} + e^x(10x - 13) \\ 13e^{6x} + e^x(12 - 15x) \end{pmatrix}$$

es la única solución de dicho problema de condiciones iniciales.

Ejercicios.