Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 3.3: ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR.

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción: **Teoría general para ecuaciones lineales de orden** n.
Ecuación lineal de coeficientes constantes y homogénea.
Ecuación de orden dos.
Ecuación de orden n.
Ecuación lineal de coeficientes constantes y no homogénea.
Aplicación de estas ecuaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes (homogéneos y no homogéneos).
Ecuación lineal de coeficientes variables (**Opcional**)
Casos particulares: Ecuaciones de Cauchy-Euler y de Legendre.
Ecuación de coeficientes variables y homogénea.
Ecuación de coeficientes variables y no homogénea.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

Introducción: Teoría general para ecuaciones lineales de orden n.

Una **ecuación diferencial de orden** $n > 1$ es toda expresión de la forma

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$$

donde $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. En esta sección nos vamos a ocupar de un tipo particular de estas ecuaciones de orden n, como van a ser las **ecuaciones diferenciales lineales de orden** n.

Estas son ecuaciones de la forma

$$a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

donde para $0 \leq i < n$, $a_i(x)$ y $b(x)$ son funciones reales de variable real definidas en un intervalo de la recta real I. Siempre que $a_n(x)$ sea no nula, podremos escribir la ecuación en la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$$

Según que sea $b(x)$, diremos que la ecuación es **homogénea** (si $b(x)$ es nulo) o **no homogénea** (si $b(x)$ es no nulo), es decir, si $q(x)$ es o no nulo. Además la ecuación se dirá de **coeficientes constantes** cuando $p_i(x)$ sean constantes, es decir, cuando $p_i(x) = p_i \in \mathbb{R}$.

Para este tipo de ecuaciones se verifican los siguientes resultados:

Theorem *El conjunto de soluciones de la ecuación homogénea*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = 0$$

tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$, *esto es, cualquier solución y de la misma es de la forma*

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \ldots + c_n \cdot y_n$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones particulares linealmente independientes de dicha ecuación.

Theorem *Dadas $y_1, y_2, \ldots, y_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluciones particulares de la ecuación homogénea*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = 0$$

son equivalentes:

a) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.

b) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

c) Existe $x_0 \in I$ tal que $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$.

La teoría general, en lo que a la estructura de las soluciones se refiere, quedará cerrada con la siguiente caracterización de las ecuaciones no homogéneas:

Theorem *El conjunto de soluciones de la ecuación*

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$$

es de la forma

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \ldots + c_n \cdot y_n + y_p$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación homogénea e y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Ecuación lineal de coeficientes constantes y homogénea.

Consideraramos en este apartado un caso particular de ecuaciones de la forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x) \cdot y' + p_0(x) \cdot y = q(x)$$

en las que $p_i(x) = p_i = cte$ y $q(x) = 0$, es decir ecuaciones del tipo

$$y^{(n)} + p_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1 \cdot y' + p_0 \cdot y = 0$$

Un ejemplo de este tipo de ecuaciones puede ser

$$y^{IV} - y''' + y'' + y = 0$$

y veremos como, de una forma sencilla, es posible obtener todas las soluciones de esta edo lineal. Para ello lo estudiaremos inicialmente para la ecuación de orden 2, y con posterioridad veremos como se puede generalizar a ecuaciones diferenciales lineales de orden superior:

Ecuación de orden dos.

Sea la ecuación diferencial lineal de 2º orden y de coeficientes constantes y homogénea dada por

$$a_1 \cdot y'' + a_2 \cdot y' + a_3 \cdot y = 0$$

donde consideraremos que $a_1 \neq 0$. Así, esta edo puede escribirse en la forma

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \qquad (*)$$

Solucionar esta ecuación requiere encontrar una función $y = f(x)$ que tenga la propiedad que si esta $f(x)$ y sus derivadas primera y segunda se multiplican por ciertas ctes y se suman los productos resultantes, el resultado sea igual a 0. Para que esto ocurra, necesitaremos de una $f(x)$ tal que f' y f'' sean múltiplos de f. Así, ¿qué funciones conocemos que tengan la propiedad que $f'(x) = cte \bullet f(x)$ y tal que $f''(x) = cte \bullet f(x)$. Una función que verifica ésto es $f(x) = e^{r\cdot x}$. Así, si sustituimos en $(*)$, tendrá que ser

$$r^2 e^{r\cdot x} + p \bullet r \bullet e^{r\cdot x} + q e^{r\cdot x} = 0$$

ó lo que es lo mismo, se ha de verificar

$$r^2 + p \bullet r + q = 0$$

expresión a la que llamaremos **ecuación característica** de la ecuación inicial $y'' + p \bullet y' + q \bullet y = 0$.

De todo ésto deducimos que si $f(x) = e^{r\cdot x}$ es una solución, entonces r debe ser tal que verifique la ecuación característica anterior. Por ello, distinguiremos 3 casos según sean las dos raíces (a las que denotaremos por m_1 y m_2) de la ecuación característica $r^2 + p \bullet r + q = 0$:

- m_1 y m_2 son reales distintas: En este caso $y_1 = e^{m_1 x}$ e $y_2 = e^{m_2 x}$ son soluciones de $(*)$ (ya que se verifica la ec. característica) y puesto que ambas son soluciones independientes al ser

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{m_1 x} & e^{m_2 x} \\ m_1 e^{m_1 x} & m_2 e^{m_2 x} \end{vmatrix} = e^{(m_1+m_2)x}(m_2 - m_1) \neq 0$$

la solución general de $(*)$ vendrá dada por

$$y = c_1 \bullet e^{m_1 x} + c_2 \bullet e^{m_2 x}$$

Example *Resolver* $y'' - 3y' + 2y = 0$.

- m_1 y m_2 son reales iguales: En este caso $y_1 = e^{m_1 x}$ es una única solución de (*). Puesto que la solución de (*) viene dada por una combinación lineal de dos soluciones que sean linealmente independientes, necesitamos de una segunda solución particular y_2 que sea independiente con y_1. ¿Cómo determinar esta y_2? La respuesta nos la da el siguiente resultado:

Proposition *Si $y_1 = e^{m_1 x}$ es una solución particular de $(*)$, entonces $y_2 = xe^{m_1 x}$ también es solución particular de $(*)$ y es linealmente independiente de y_1.*

Por lo tanto, en este caso la solución general de $(*)$ viene dada por

$$y = c_1 \bullet e^{m_1 x} + c_2 \bullet xe^{m_2 x} = (c_1 + c_2 \bullet x)e^{m_1 x}$$

Example *Resolver* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

- m_1 y m_2 son complejas conjugadas: Sean entonces $m_1 = a + bi$ y $m_2 = a - bi$. De nuevo se tiene en este caso que $y_1 = e^{m_1 x} = e^{(a+bi)x}$ e $y_2 = e^{m_2 x} = e^{(a-bi)x}$ son soluciones de (*). Antes de probar que son linealmente independientes, y puesto que estas funciones son complejas, vamos a ver como es posible encontrar, a partir de ellas, dos soluciones que sean reales y linealmente independientes: Por las fórmulas de Euler se tiene

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$$

de donde

$$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{bix} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$
$$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}e^{-bix} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$$

Si sumamos y restamos ambas expresiones se llega a

$$y_1 + y_2 = 2e^{ax}\cos bx$$
$$y_1 - y_2 = 2ie^{ax}\sin bx$$

de donde

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos bx$$
$$\frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax}\sin bx$$

Por ello, en lugar de tomar y_1 e y_2 como soluciones particulares de (*), tomaremos $\frac{y_1+y_2}{2}$ e $\frac{y_1-y_2}{2i}$ (que también son soluciones particulares de (*) al ser combinaciones lineales de soluciones de (*)), es decir, tomaremos como soluciones particulares a las funciones reales $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\sin bx$. Como ambas funciones son linealmente independientes (probar que su wronskiano es no nulo), tendremos que la solución general de $(*)$ viene dada por

$$y = c_1 \cdot e^{ax}\cos bx + c_2 \cdot e^{ax}\sin bx = e^{ax}(c_1 \cdot \cos bx + c_2 \cdot \sin bx)$$

Example *Resolver* $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Ecuación de orden n.

Para el caso más general de una ecuación diferencial lineal de orden n

$$y^{(n)} + p_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_1 \cdot y' + p_0 \cdot y = 0$$

se actuará como en el caso de la de 2^o orden, es decir, resolveremos la correspondiente ecuación característica, y según sean las soluciones de la misma usaremos las soluciones particulares halladas en el caso de la ecuación de 2^o orden, de manera que, al final, la solución general será una combinación lineal de soluciones de la forma e^{m_1x} (para todas aquellas soluciones de la ec. característica m_1 que sean simples), o de soluciones tipo xe^{m_1x} (si m_1 es raiz doble), o del tipo $x^2e^{m_1x}$ (si m_1 es raiz triple), etc., mientras que para el caso de raices complejas conjugadas será combinación lineal de funciones de la forma $e^{ax}\cos bx$ e $e^{ax}\sin bx$, por cada par de raíces conjugadas.

En el caso de estas ecuaciones lineales de mayor orden, el problema radica en la dificultad de resolver la ecuación característica, como observamos en el siguiente ejemplo:

Example *Así, para resolver la ecuación diferencial*

$$y^{VI} - 3y^{V} - 5y^{IV} + 17y''' + 18y'' - 68y' + 40y = 0$$

deberemos calcular las raíces de la ecuación

$$x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 17x^3 + 18x^2 - 68x + 40 = 0$$

que son $x_1 = 1$ *(simple),* $x_2 = 2$ *(triple) y* $x_3 = -2 \pm 2i$ *(simples). Entonces, la solución general de la ecuación anterior viene dada por*

$$y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot xe^{2x} + c_4 \cdot x^2e^{2x} + c_5 \cdot e^{-2x}\cos(-2x) + c_6 \cdot e^{-2x}\sin(-2x) =$$
$$= c_1 \cdot e^{x} + (c_2 + c_3 \cdot x + c_4 \cdot x^2)e^{2x} + e^{-2x}(c_5 \cdot \cos(2x) - c_6 \cdot \sin(2x))$$

Ecuación lineal de coeficientes constantes y no homogénea.

Consideraremos en este caso la ecuación de orden dos dada por

$$y'' + p \bullet y' + q \bullet y = f(x) \qquad (**)$$

donde los coeficientes son constantes pero el término no homogéneo $f(x) \neq 0$ es una función de x que supondremos continua. Por el último teorema del primer apartado de esta sección, sabemos que la solución general de esta ecuación viene dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada a $(**)$, y que ya sabemos hallar en virtud del apartado anterior, más una solución particular de $(**)$, es decir

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH}$$

Por tanto solo tenemos que centrarnos en como hallar una solución particular de la ecuación no homogénea. Para ello, utilizaremos el conocido como **Método de los coeficientes indeterminados**:

- **Regla 1**: Supongamos que $f(x)$ es una función tal que al derivarla repetidamente se obtienen solamente un n^o finito de expresiones linealmente independientes (después veremos cuales son las funciones $f(x)$ que verifican esta condición). Entonces podemos obtener la solución particular de la ec. no homogénea del siguiente modo:
  - Supondremos que y_{PNH} es una combinación lineal arbitraria (con coeficientes por determinar) de todos los términos linealmente independientes que aparecen en $f(x)$ y en sus sucesivas derivadas.
  - Sustituiremos esta y_{PNH} en la ecuación inicial.
  - Determinaremos los coeficientes que aparecen en y_{PNH} de manera que la ecuación resultante se satisfaga identicamente.

Remark *El tipo de funciones $f(x)$ que poseen un número finito de derivadas que sean linealmente independiente está formado por las funciones k (cte), x^n, e^{kx}, $\cos kx$, $\sin kx$ y cualquier otra que se obtenga por un número finito de sumas, restas o productos de éstas.*

Example *Resolver la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 2e^{4x}$.*

Example *¿Qué ocurre si intentamos resolver por este método la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 2e^{3x}$?*

- **Regla 2**: Si alguno de los términos de la expresión que hemos considerado para y_{PNH} aparece también en la solución general de la ec. homogénea y_{GH}, entonces antes de sustituir y_{PNH} en la ecuación inicial (para hallar los coeficientes indeterminados) lo multiplicaremos por la menor potencia positiva de x que elimine dicha duplicación.

Exercise *Resolver de nuevo el ejemplo anterior.*

Exercise *Resolver:*

a) $y'' - 4y' + 2y = 4.$

b) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3.$

c) $y'' - 4y' = x^2 - 3x.$

Podemos dar una tabla que nos indique como será y_{PNH} según sea el término no homogéneo $f(x)$:

Si $f(x)$ es de la forma:	y_{PNH} será del tipo:
α (cte)	A (cte)
αx^n	$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$
αe^{mx}	Ae^{mx}
$\alpha\cos(kx)$ o $\alpha\sin(kx)$	$A\cos(kx) + B\sin(kx)$
$\alpha x^n e^{mx}\cos(kx)$ ó $\alpha x^n e^{mx}\sin(kx)$	$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)e^{mx}\cos(kx) +$ $(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n)e^{mx}\sin(kx)$

Remark *Cuando $f(x)$ sea la suma de varios términos de la anterior tabla, y_{PNH} será la suma de las expresiones de y_{PNH} correspondientes a cada uno de estos términos.*

Exercise *Resolver:*

a) $y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10\sin x.$

b) $y'' + 3y = e^{2x}\cos(3x).$

Aplicación de estas ecuaciones a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes (homogéneos y no homogéneos).

Aunque la teoría de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales da lugar a un tema aparte (aparece desarrollado como Anexo con todo detalle en un tema aparte en este Bloque), la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (ya sean o no homogéneos) pueden reducirse, especialmente si se trata de pocas ecuaciones con pocas incógnitas (por ejemplo de 2 o de 3 ecuaciones con 2 o 3 incógnitas), a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de 2^o o de 3er orden con coeficientes constantes (y homogéneas o no). Antes de verlo con un ejemplo, introduciremos brevemente los sistemas a los que queremos hacer referencia (lo que viene a continuación está extraído de la última sección de este capítulo):

Definition *Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es toda expresión de la forma*

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}$$

Si denotamos por

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y por

$$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T, \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$$

el sistema anterior puede escribirse en la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

Definition *Un sistema se dirá **homogéneo** si* $\mathbf{b}(x) = (0,0,\ldots,0)$*, y en caso contrario se dirá **no homogéneo**.*

Definition *Un sistema se dirá de **coeficientes constantes** si la matriz* $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$ *es constante.*

Example *El sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2 \\ \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

es de coeficientes constantes, pero no es homogéneo ($\mathbf{b}(x) = (1 - x^2, e^{-x})$*), mientras que el sistema*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

es homogéneo de coeficientes constantes.

Entonces, en este último apartado de esta sección, vamos a resolver sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

donde **A** es una matriz cuadrada de coeficientes constantes, $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))^T$ es un vector columna (pudiendo ser o no nulo) formado por funciones reales y continuas en un intervalo real I e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, para lo cual reduciremos dicho sistema a una ec. diferencial lineal.

Veámoslo como hacerlo con unos ejemplos:

Example *Imaginemos que pretendemos resolver el sistema homogéneo dado por*

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

Si despejamos y_1 *de la* 2^a *ecuación, tendremos* $y_1 = y_2 - y_2'$*, de donde* $y_1' = y_2' - y_2''$ *. Si sustituimos entonces en la primera ecuación, tendremos*

$$y_2' - y_2'' = 3(y_2 - y_2') + y_2$$

o lo que es lo mismo

$$y_2'' - 4y_2' + 4y_2 = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal de 2^o *orden homogénea, y que resolveremos fácilmente sin mas que conocer las raíces de su ecuación característica. Una vez hallada* y_2 *podremos hallar* y_1*, al ser* $y_1 = y_2 - y_2'$*.*

Example *Si lo que queremos es resolver el sistema no homogéneo*

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 5y_2 + 1 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + e^x \end{cases}$$

podemos actuar de forma similar: Despejando y_1 *de la* 2^a *ecuación, tendremos* $y_1 = y_2 - y_2' + e^x$*, de donde* $y_1' = y_2' - y_2'' + e^x$ *. Si sustituimos entonces en la primera ecuación, tendremos*

$$y_2' - y_2'' + e^x = -(y_2 - y_2' + e^x) + 5y_2 + 1$$

o lo que es lo mismo

$$y_2'' + 4y_2 = 2e^x - 1$$

que es una ecuación diferencial lineal de 2^o *orden no homogénea, y que resolveremos fácilmente sin mas que solucionar primero la ecuación homogénea asociada y sumarle a la misma una solución particular (que hallaremos a través del método de los coeficientes indeterminados). Una vez hallada* y_2 *podremos hallar* y_1*, al ser* $y_1 = y_2 - y_2' + e^x$*.*

Remark *Este proceso de reducir sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior es aconsejable cuando tengamos un sistema con pocas ecuaciones (2 ó 3 a lo sumo). Para el caso de más ecuaciones tendremos que aplicar lo que aparece como Anexo en la última sección de este capítulo.*

Ecuación lineal de coeficientes variables. (Opcional)

Casos particulares: Ecuaciones de Cauchy-Euler y de Legendre.

Estas ecuaciones van a ser un caso particular de coeficientes variables, pero que pueden, mediante un adecuado cambio de variable, reducirse a ecuaciones lineales de coeficientes constantes estudiadas con anterioridad.

Así, la ecuación de **Cauchy - Euler** es de la forma

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x \cdot y' + a_0 \cdot y = q(x)$$

mientras que la ecuación de Legendre es más general que la anterior, en concreto, de la forma

$$(\alpha x+\beta)^n\cdot y^{(n)}+a_{n-1}^{n-1}(\alpha x+\beta)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_1(\alpha x+\beta)\cdot y'+a_0\cdot y=q(x)$$

Para resolver la ec. de Cauchy - Euler aplicaremos el cambio $x=e^t$ (para el caso de la de Legendre el cambio será $\alpha x+\beta=e^t$) pudiendose obtener de esta forma una ecuación lineal de coeficientes ctes. Por ejemplo, si consideramos la ecuación

$$x^2\cdot y''+\frac{11}{3}x\cdot y'-y=0$$

el cambio $x=e^t$ nos da

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\dot{y}\,\frac{1}{x}$$

donde $\dot{y}$ representa la derivada de y respecto de la variable t. Si calculamos la segunda derivada

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\dot{y}\,\frac{1}{x}\right)=\frac{d\dot{y}}{dx}\frac{1}{x}-\dot{y}\,\frac{1}{x^2}=$$

$$=\frac{d\dot{y}}{dt}\frac{dt}{dx}\frac{1}{x}-\dot{y}\,\frac{1}{x^2}=\ddot{y}\,\frac{1}{x^2}-\dot{y}\,\frac{1}{x^2}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior resultará

$$x^2\left(\ddot{y}\,\frac{1}{x^2}-\dot{y}\,\frac{1}{x^2}\right)+\frac{11}{3}x\cdot\dot{y}\,\frac{1}{x}-y=0$$

de donde se obtiene

$$\ddot{y}+\frac{8}{3}\dot{y}-y=0$$

que es una lineal de segundo orden de coeficientes constantes (dependiendo ahora y de la nueva variable t). Las soluciones de ésta última ecuación son de la forma

$$y(t)=c_1\cdot e^{t/3}+c_2\cdot e^{-3t}=c_1\cdot(e^t)^{1/3}+c_2\cdot(e^t)^{-3}$$

de donde deshaciendo el cambio se obtiene la solución de la ecuación inicial

$$y(x)=c_1\cdot x^{1/3}+c_2\cdot x^{-3}$$

Ecuación de coeficientes variables y homogénea.

En esta sección vamos a considerar las ecuaciones homogéneas de orden 2 con coeficientes variables, y vamos a ver que si conocemos una solución particular de dicha ecuación y_1 es posible calcular una segunda solución particular y_2, de manera que la solución general será una combinación lineal de ambas soluciones particulares. No se va a hacer el desarrollo teórico, sino que directamente se dará la expresión para y_2. A este procedimiento se le suele conocer como **Método de reducción del orden**:

Partimos entonces de la ecuación

$$a(x)\cdot y''+b(x)\cdot y'+c(x)\cdot y=0$$

y supongamos que conocemos una solución particular no nula de la misma y_1. A partir de ésta, vamos a construir una nueva solución particular de la forma $y_2(x)=z(x)y_1(x)$, siendo $z(x)$ una función a determinar. Pues entonces, exigiendo a y_2 que sea solución de la anterior ecuación se obtiene una ecuación lineal de primer orden (de aquí el nombre de éste método), siendo la función a determinar $z'(x)$. Resolviendo esta edo de primer orden, resulta que la segunda solución particular buscada viene dada por la siguiente expresión

$$y_2(x)=y_1\int k\cdot exp\left(-\int\frac{2a(x)\cdot y_1'+b(x)\cdot y_1}{a(x)\cdot y_1}dx\right)dx$$

con lo que la solución general de la ec. homogénea de coeficientes variables inicial vendrá dada por

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

Remark *La principal dificultad de aplicar este método es la de encontrar la primera de las soluciones $y_1(x)$, ya que sin ésta no es posible obtener la segunda. Normalmente, suele darse siempre esta y_1, y si en algún ejercicio no se da, ésta será una función sencilla, por ejemplo, un polinomio, la función e^x o funciones por el estilo. Sin embargo, existe un gran número de ecuaciones diferenciales de orden dos de las que no se conoce su solución, es decir, que no podremos hallar una solución particular. Obviamente, no nos referiremos a estas ecuaciones.*

Example *Ver ejemplos*

Ecuación de coeficientes variables y no homogénea.

Éste va a ser el caso más general, y por lo tanto más complicado. Solo veremos esquemáticamente como conseguir la solución general para una ecuación del tipo

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = f(x)$$

donde supondremos conocida una solución particular de la ecuación homogénea asociada (que nos permitirá, por el procedimiento de reducción del orden, encontrar la segunda solución particular y por lo tanto la solución general de la homogénea).

Para éste tipo de ecuaciones es de aplicación lo visto en el apartado de Introducción a estas ecuaciones, es decir, siempre se verificará que la solución general de esta ecuación es suma de la solución general de la ecuación homogénea y de una solución particular de la ecuación no homogénea. Como el apartado anterior nos ha dado la solución general de la homogénea, nos centraremos entonces en como obtener la solución particular de la ecuación no homogénea que necesitamos. En este caso, hallaremos y_{PNH} utilizando el llamado **Método de variación de parámetros**:

Sea y_1 la solución particular de la ecuación homogénea que es conocida (la que nos dan). Como hemos visto anteriormente, a partir de ésta podemos hallar y_2 mediante la expresión

$$y_2(x) = y_1 \int k \cdot exp\left(-\int \frac{2a(x) \cdot y_1' + b(x) \cdot y_1}{a(x) \cdot y_1} dx\right) dx$$

Entonces vamos a buscar para y_{PNH} una función de la forma

$$y_{PNH}(x) = u_1(x) \cdot y_1(x) + u_2(x) \cdot y_2(x)$$

siendo $u_1(x)$ y $u_2(x)$ funciones a determinar. Sin entrar en el desarrollo teórico del razonamiento a emplear, se llega a que para determinar estas dos funciones hay que resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1' \cdot y_1 + u_2' \cdot y_2 = 0 \\ a(x)(u_1' \cdot y_1' + u_2' \cdot y_2') = f(x) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema con incógnitas $u_1'(x)$ y $u_2'(x)$, resulta ser

$$u_1' = \frac{f(x) \cdot y_2}{a(x)(y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2')}; \quad u_1' = \frac{-f(x) \cdot y_1}{a(x)(y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2')}$$

por lo que la solución particular buscada viene dada por

$$y_{PNH} = y_1 \int \frac{f(x) \cdot y_2}{a(x)(y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2')} dx - y_2 \int \frac{f(x) \cdot y_1}{a(x)(y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2')} dx$$

y la solución general de la ecuación lineal no homogénea de coeficientes variables inicial será

$$y = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + y_{PNH}$$

Example *Ver varios ejemplos.*

Ejercicios resueltos.

1. (2do parcial, junio 2011) *Resolver el sistema lineal*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 3y_2 + x - 1 \end{cases}$$

Solución: Sustituyendo directamente la 1^a ecuación en la segunda, se obtiene

$$y_1'' = 3y_1' + x - 1 \Leftrightarrow y_1'' - 3y_1' = x - 1$$

por lo que se trata de una edo lineal de 2^o orden, de coef. ctes y no homogénea.

La solución general de la homogénea asociada y_{GH} viene dada por las raíces del polinomio característico (que son 0 y 3), por lo que

$$y_{GH} = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^{3x} = C_1 + C_2 \cdot e^{3x}$$

Como la parte no homogénea es $x - 1$, inicialmente tomaremos como solución particular de la edo no homogénea

$$y_{PNH} = Ax + B$$

pero como hay repetición entre el término B y una parte de y_{GH} (se trata de C_1), tomaremos

$$y_{PNH} = Ax^2 + Bx$$

y sustituyendo en la ecuación $y_1'' - 3y_1' = x - 1$, se llega a $A = \frac{-1}{6}$ y $B = \frac{2}{9}$.

Por tanto

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH} = C_1 + C_2 \cdot e^{3x} - \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x$$

2. (2do parcial, junio 2012) *Resolver el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{r} x'' + 3x' + 2x = e^{-t} + \sin t \\ x(0) = 0,05;\ x'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Solución: Se trata de una edo lineal de 2do orden, de coeficientes constantes y no homogénea, por lo que su solución general vendrá dada por

$$x_{GNH} = x_{GH} + x_{PNH}$$

La solución general de la ecuación homogénea viene dada por (al ser las raíces de la ecuación característica asociada $r_1 = -1,\ r_2 = -2$):

$$x_{GH} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

Como la parte no homogénea es $f(t) = e^{-t} + \sin t$, probaremos para la solución particular de dicha ecuación una expresión de la forma

$$x_{PNH} = A \cdot t \cdot e^{-t} + B \sin t + C \cos t$$

Sustituyendo esta expresión en $x'' + 3x' + 2x = e^{-t} + \sin t,$ e igualando los respectivos términos, se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{lr}
(\text{coef } e^{-t}) & -2A + 3A = 1 \\
(\text{coef } t \cdot e^{-t}) & A + 2A - 3A = 0 \\
(\text{coef } \sin t) & -B - 3C + 2B = 1 \\
(\text{coef } \cos t) & -C + 3B + 2C = 0
\end{array}\right\}$$

por lo que $A = 1,\ B = \frac{1}{10},\ C = \frac{-3}{10}.$

Así,

$$x_{GNH} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + t \cdot e^{-t} + \frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t$$

De la condición inicial $x(0) = 0,05$ resulta

$$C_1 + C_2 - \frac{3}{10} = 0,05$$

y de $x'(0) = 0$ se obtiene

$$-C_1 - 2C_2 + 1 + \frac{1}{10} = 0$$

siendo por tanto $C_1 = -0,4,\ C_2 = 0,75.$

Así, la solución del PVI dado es

$$x_{GNH} = -0,4 \cdot e^{-t} + 0,75 \cdot e^{-2t} + t \cdot e^{-t} + \frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t$$

3. (2do parcial, mayo 2013) *Resolver*:

$$y'' - 2y' + y = e^x + 3$$

Solución: La edo lineal de 2º orden y homogénea, tiene por solución general

$$y_{GH} = c_1 e^x + c_2 x e^x = (c_1 + c_2 x) e^x$$

(puesto que la única raíz de la ec. característica $r^2 - 2r + 1 = 0$, es $r_1 = 1$, doble).

Al ser el término no homogéneo $e^x + 3,$ inicialmente podemos tomar como solución particular de la ec. no homogénea la dada por

$$y_{PNH} = Ae^x + B$$

pero observamos que hay repetición con alguno de los términos que aparecen en y_{GH} (el término e^x). Lo mismo ocurriría si tomásemos

$$y_{PNH} = Axe^x + B$$

(el término xe^x). Por tal motivo, tomaremos

$$y_{PNH} = Ax^2 e^x + B$$

Si sustituimos esta expresión en la edo inicial ($y'' - 2y' + y = e^x + 3$), simplificando se llega a

$$2Ae^x + B = e^x + 3$$

de donde $A = \frac{1}{2}$ y $B = 3$.

De esta forma, la solución general de la edo dada es

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH} = (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x + 3$$

4. (2do parcial, mayo 2015) *Resolver, en función de los valores del parámetro α, la siguiente edo lineal:*

$$y''' - 2y'' + \alpha^2 y' - 2\alpha^2 y = 0$$

Solución: El polinomio característico de la edo es

$$r^3 - 2r^2 + \alpha^2 r - 2\alpha^2 = 0$$

Estudiamos las raíces de esta ecuación según valores de α :
- Si $\alpha = 0$, la ecuación se reduce a $r^3 - 2r^2 = 0$, que tiene por raíces $r_1 = 0$ (doble) y $r_2 = 2$. Por tanto, en este caso, la solución general de la edo será

$$y = (C_1 x + C_2)e^{0x} + C_3 e^{2x} = C_1 x + C_2 + C_3 e^{2x}$$

- Si $\alpha \neq 0$, la ecuación característica tiene por soluciones $r_1 = 2$ y $r_{2,3} = \pm \alpha i$ (el polinomio característico puede ponerse como $(r-2)(r^2 + \alpha^2)$).
Así, la solución general viene dada por

$$y = C_1 e^{2x} + e^{0x}(C_2 \cos \alpha x + C_3 \sin \alpha x) = C_1 e^{2x} + C_2 \cos \alpha x + C_3 \sin \alpha x$$

5. (2do parcial, mayo 2016) Resolver la siguiente edo lineal

$$y''' + 6y'' + 15y' + 14y = 2x$$

Solución: Podemos comprobar que las raíces de la ecuación característica $r^3 + 6r^2 + 15r + 14 = 0$ son $r_1 = -2$ y $r_{2,3} = -2 \pm i\sqrt{3}$.
De esta forma la solución general de la edo homogénea vendrá dada por

$$y_{GH} = C_1 e^{-2x} + e^{-2x}\left(C_2 \cos\left(\sqrt{3}\,x\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{3}\,x\right)\right)$$

Por coeficientes indeterminados, probaremos como solución particular de la edo no homogénea, la función

$$y_{PNH} = Ax + B$$

donde los coeficientes A y B se obtienen de forma inmediata sin más que sustituir en la ecuación inicial:
Como $y'_{PNH} = A$ e $y''_{PNH} = y'''_{PNH} = 0$, se verificará

$$0 + 7 \cdot 0 + 15A + 14(Ax + B) = 2x \Rightarrow A = \frac{1}{7},\ B = -\frac{15}{98}$$

De esta forma, la solución general de la edo no homogénea viene dada por

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH} = C_1 e^{-2x} + e^{-2x}\left(C_2 \cos\left(\sqrt{3}\,x\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{3}\,x\right)\right) + \frac{x}{7} - \frac{15}{98}$$

Ejercicios propuestos.

1. Integrar las siguientes edo's lineales de orden superior y homogéneas:
   a. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
   b. $y'' + y' + y = 0.$
   c. $y'' + 4y' + 4y = 0.$
   d. $y'' + 5y' - 6y = 0.$
   e. $y'' + y' + 2y = 0.$
   f. $y'' + 2y' + y = 0.$
   g. $y^{(6)} + y^{(4)} = 0.$
   h. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$
   i. $y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0.$
   j. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0.$
   k. $x^2y'' + \frac{11}{3}xy' - y = 0.$

2. Integrar las siguientes edo's lineales de orden superior y no homogéneas:
   a. $y'' + 2y' + y = e^{-x}.$
   b. $y'' - 2y' + y = xe^{2x}.$
   c. $y'' - 3y' + 2y = \cos(3x).$
   d. $y'' - 7y' + 10y = 2x^2.$
   e. $y'' + 3y' + 2y = e^x + \sin(x).$
   f. $y''' - 3y' + 2y = x^2e^x.$
   g. $y'' - 4y' = \cos(x) + \sin(x).$

3. Resolver los siguientes PVI:
   a. $y'' + 2y' - y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = -1.$
   b. $y'' - y' - 6y = 0;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$
   c. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = 2.$
   d. $3x^2y'' + 11xy' - 3y = 8 - 3\log(x);\ y(1) = 1;\ y'(1) = \frac{4}{3}.$

4. Resolver las siguientes edo's:
   a. $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}.$
   b. $y'' - y = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}.$

5. Integrar los siguientes sistemas homogéneos de edo's lineales:
   a. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = -y \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$
   d. $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -4x - y \end{cases}$

e. $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases}$

f. $X' = AX$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.