Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 3.2: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN.

PROGRAMA DETALLADO:

Teorema básico de existencia y unicidad.
Tipos de EDO's de primer orden:
Variables separadas.
Ecuaciones homogéneas.
Ecuaciones diferenciales exactas. Factores integrantes.
Ecuaciones diferenciales lineales (de primer orden).
Otros tipos de edo de 1er orden.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

Teorema básico de existencia y unicidad.

Lo primero que hemos de plantearnos cuando tenemos un PVI es ver si éste tiene solución y si la solución es única. De tal menester se ocupa el siguiente resultado (del que se omite su demostración):

Theorem *(de Existencia y Unicidad de la solución de un PVI) Sea la edo de 1er orden $y' = f(x,y)$, donde*

a) f es continua en algún dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(x_0, y_0) \in D$.

Entonces existe una solución única Φ del PVI

$$\left.\begin{array}{r} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

definida en algún intervalo lo suficientemente pequeño de x_0, que satisface la condición $y(x_0) = y_0$.

Example *Dado el PVI*

$$\left.\begin{array}{r} y' = x^2 + y^2 \\ y(1) = 3 \end{array}\right\}$$

se verifica que tanto $f(x,y) = x^2 + y^2$ como $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son funciones continuas en todo $D \subset \mathbb{R}^2$ y como el punto $(1,3) \in D$, resulta que el PVI dado tiene solución única definida en un entorno del punto $x_0 = 1$. Otra cosa es como se calcula esta *solución.*

Example *Dado el PVI*

$$\left.\begin{array}{l} y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \\ y(0) = 2 \end{array}\right\}$$

se verifica que tanto $f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$ *como* $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *son continuas en todo* (x,y) *con* $x \neq 0$*. Por tanto, el punto* $(0,2)$ *no puede estar incluido en un dominio D donde se verifiquen las condiciones del teorema de existencia y unicidad.*

Así, no podemos concluir a partir del teorema anterior que este PVI tenga solución única (esto no quiere decir que no tenga solución o que tenga varias).

Tipos de EDO's de primer orden.

Variables separadas.

Son las edo de 1er orden que pueden expresarse en la forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde M es continua de x y N es continua de y. Para solucionarlas se expresará en la forma

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

o bien

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

e integraremos en ambos miembros para obtener la solución general

$$\int M(x)dx = -\int N(y)dy$$

Example *Hallar la solución general de*

$$(x-4)y^4 - x^3(y^2-3)\frac{dy}{dx} = 0$$

Example *Solucionar el PVI*

$$\left.\begin{array}{r} xydx + e^{-x^2}(y^2-1)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Example *Se supone que está nevando con regularidad (es decir, que siempre cae la misma cantidad de nieve). A las 12 horas sale una máquina quitanieves que, en la primera hora, recorre 2 kilómetros, mientras que en la 2da hora recorre 1 km. (puesto que hay más nieve acumulada) ¿A qué hora comenzó a nevar?*

Ecuaciones homogéneas.

Definition *Una función* $f(x,y)$ *es* ***homogénea*** *de grado* $\alpha \in \mathbb{R}$*, si*

$$f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y)$$

Definition *Una edo de 1er orden $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se dice **homogénea** si las funciones M y N son homogéneas del mismo grado.*

Estas ecuaciones se resuelven siempre mediante separación de variables, aunque previamente hay que realizar un cambio de variables:

Proposition *Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación homogénea, entonces se transforma en una edo en variables separadas mediante el cambio $y = v \cdot x$, siendo v una función diferenciable de x.*

Example *Hallar la solución general de*

$$(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$$

Example *Idem para*

$$\left(x \operatorname{sen} \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$$

Ecuaciones diferenciales exactas. Factores integrantes.

Definition *Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es **exacta** si existe una función $f(x,y)$, con derivadas parciales continuas, tal que*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Remark *La solución general de una ecuación diferencial exacta viene dada por*

$$f(x,y) = Cte$$

ya que la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se transforma en

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0$$

lo que quiere decir que $df(x,y) = 0$, por lo que $f(x,y) = Cte$.

Veamos un resultado práctico que nos asegura cuando una edo es exacta:

Theorem ***(Criterio de exactitud)*** *Sea $f(x,y)$ una función que admite derivadas parciales continuas en $D \subset \mathbb{R}^2$. Entonces*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \text{ es exacta } \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Example *a) La edo* $(xy^2 + x)dx + yx^2dy = 0$ *es exacta, ya que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2yx = \frac{\partial N}{\partial x}$$

b) La edo $\cos y dx + (y^2 - x \operatorname{sen} y)dy = 0$ *es exacta, ya que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\operatorname{sen} y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Sabemos que la solución general de una ecuación exacta viene dada por $f(x,y) = Cte$. Veamos como se puede hallar esta $f(x,y)$:

Como $f(x,y)$ ha de cumplir $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, integrando respecto a la variable x, se tiene

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \qquad (*)$$

Por tanto, para hallar $f(x,y)$ sólo nos falta determinar $g(y)$.

Como también $f(x,y)$ ha de cumplir $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, si derivamos respecto y la expresión $(*)$, se tiene

$$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int M(x,y)dx + g(y)\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\int M(x,y)dx\right\} + g'(y)$$

expresión que nos permitirá hallar $g(y)$. Así, la solución general de una ecuación exacta viene dada por

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = C$$

Example *Probar que*

$$(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$$

es exacta y hallar su solución general.

Example *Resolver el PVI*

$$(\cos x - x \operatorname{sen} x + y^2)dx + 2xydy = 0$$

con $y(\pi) = 1$.

Factores integrantes.

Si una edo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta, puede darse la posibilidad de convertirla en exacta si se multiplica por un adecuado factor $\mu(x,y)$.

Example *Probar que la ecuación* $2ydx + xdy = 0$ *no es exacta, pero que si se multiplica esta ecuación por* $\mu(x,y) = x$*, la ecuación resultante sí que es exacta.*

Example *Idem para* $ydx - xdy = 0$*, y para* $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$.

Definition *Una función* $\mu(x,y)$*, que admite derivadas parciales continuas en un cierto dominio D, es un* ***factor integrante*** *de la ecuación* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$*, si*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

es una ecuación exacta.

Remark *La ventaja que tienen los factores integrantes es que transforman una edo no exacta, en una edo exacta, y que por tanto podemos solucionar. Además, trivialmente se verifica que si una función $y = y(x)$ es solución de la ecuación exacta obtenida al multiplicar por el factor integrante $\mu(x,y)$, también resulta ser $y = y(x)$ solución de la ecuación original.*

El problema se presenta entonces a la hora de determinar $\mu(x,y)$. Vamos a estudiar unos casos particulares en que sí es posible determinar $\mu(x,y)$:

- Si la expresión
$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = h(x)$$
es una función que sólo depende de x, entonces
$$\mu(x,y) = e^{\int h(x)dx}$$
es un factor integrante.

Example *Integrar la edo*
$$(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + x^2ydy = 0$$
determinando previamente un factor integrante.

- Si la expresión
$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = k(y)$$
es una función que sólo depende de y, entonces
$$\mu(x,y) = e^{-\int k(y)dy}$$
es un factor integrante.

Example *Integrar la edo*
$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \log x)dy = 0$$
mediante la determinación de un factor integrante.

- Si la expresión
$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}} = g(z)$$
es una función que sólo depende de z, entonces
$$\mu(z) = e^{\int g(z)dz}$$
es un factor integrante.

Example *Integrar la edo*

$$(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$$

mediante la determinación de un factor integrante que depende de $x + y^2$.

Example *Idem para*

$$(x - xy)dx + (x^2 + y)dy = 0$$

sabiendo que tiene un factor integrante que depende de $x^2 + y^2$.

Ecuaciones diferenciales lineales (de primer orden).

Recordamos que llamábamos **ecuación diferencial lineal de orden** n a una ecuación de la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

Como ahora solo estudiamos las edo de 1er orden, llamaremos **ecuación diferencial lineal de 1er orden** a toda ecuación de la forma

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

o equivalentemente a toda ecuación

$$y' + f(x)y = g(x)$$

Se demuestra que estas ecuaciones siempre tienen solución caso de que f y g sean continuas en un determinado intervalo, y que esta solución es única. Estas ecuaciones pueden resolverse de dos formas:

a) Haciendo un cambio $y = uv$, y se obtienen dos ecuaciones en variables separadas. (No se hará de esta forma por ser complicado).

b) Reduciéndolas a una ecuación exacta hallando previamente un factor integrante:

La expresión

$$y' + f(x)y = g(x)$$

se puede poner en la forma

$$(f(x)y - g(x))dx + dy = 0$$

Como

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$$

se verifica que

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

es un factor integrante para esta edo, por lo que la ecuación

$$e^{\int f(x)dx}(f(x)y - g(x))dx + e^{\int f(x)dx}dy = 0$$

será exacta.

Pero esta ecuación puede ponerse como

$$g(x)e^{\int f(x)dx} = (y' + f(x)y)e^{\int f(x)dx}$$

es decir

$$g(x)e^{\int f(x)dx} = \frac{d}{dx}\left(ye^{\int f(x)dx}\right)$$

Así, integrando en ambos miembros

$$ye^{\int f(x)dx} = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C$$

de donde resulta que

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C\right)$$

Por lo tanto, esta última expresión nos da la solución general de una edo lineal de 1er orden.

Example *Integrar las siguientes edo:*

a) $y' - \frac{1}{x}y = x^2$

b) $y'\cos x + y\operatorname{sen} x = 1$

c) $y' - \frac{2ax}{1-x^2y} = 2x \qquad (a \neq 0,-1)$

d) $(\operatorname{sen}^2 x - y)dx = \operatorname{tag} x dy$

e) $y' = y - \log x + \frac{1}{x}$

Example *Resolver los siguientes PVI:*

a) $y' = 3x^2y + x^2 \qquad con \qquad y(0) = 1$

b) $y' + y = e^{-x} \qquad con \qquad y(0) = 1$

Otros tipos de edo de 1er orden.

Ecuación de Bernouilli.

Es un tipo de edo muy relacionado con las ecuaciones lineales de 1er orden. Se trata de ecuaciones de la forma

$$y' = f(x)y + g(x)y^n, \qquad n \in \mathbb{R}, n \neq 0,1$$

Se integra reduciéndola al tipo lineal mediante el cambio

$$y = u^{\frac{1}{1-n}}$$

Example *Integrar*

$$y' = 2y + y^3$$

Example *Integrar*

$$xy' - y = y^2\operatorname{sen} x$$

Ecuación de Ricati.

Es un tipo particular de edo de la forma

$$y' = f(x)y + g(x)y + h(x)y^2$$

En general, esta ecuación no puede reducirse a cuadraturas, es decir, a la determinación de funciones primitivas. Ahora bien, si se conoce una integral particular y_1, sí que es posible reducir la ecuación a una ecuación lineal. Para ello, basta con realizar el cambio dado por

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

Example *Reducir la ecuación de Ricati*

$$y' = 1 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2$$

a una ecuación lineal y resolverla.

Ejercicios resueltos.

1. (2 parcial, junio 2011) *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y PVI:*

$$a)\ y' = \frac{2+y \cdot e^{xy}}{2y-x \cdot e^{xy}} \qquad b) \begin{cases} y' = (y+1)x \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Solución:

(a) Si la edo se escribe en la forma

$$(2 + y \cdot e^{xy})dx - (2y - x \cdot e^{xy})dy = 0$$

como se verifica

$$M_y = e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x = N_x$$

resulta que se trata de una edo exacta. Por tanto, su solución viene dada por $f(x,y) = cte$, siendo $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = N.$

Calculemos esta $f(x,y)$: Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \Rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = \int (2 + y \cdot e^{xy})dx + g(y) = 2x + e^{xy} + g(y)$$

De

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \Leftrightarrow e^{xy} \cdot x + g'(y) = -(2y - x \cdot e^{xy}) \Leftrightarrow g'(y) = -2y \Leftrightarrow g(y) = -y^2$$

Por tanto

$$f(x,y) = 2x + e^{xy} - y^2$$

y la solución general de la edo será

$$2x + e^{xy} - y^2 = cte$$

(b) Se trata de una edo en variables separadas (aunque también se puede expresar fácilmente como una lineal de primer orden). Si la resolvemos en variables separadas, tendremos

$$\frac{dy}{y+1} = xdx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int xdx \Leftrightarrow \log(y+1) = \frac{x^2}{2} + cte \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Para determinar C, usaremos que $y(0) = 4$, de donde

$$4 = -1 + C \bullet e^0$$

por lo que $C = 5$ y la solución del PVI es

$$y = -1 + 5e^{\frac{x^2}{2}}$$

2. (2do parcial, junio 2012) *Resolver*

$$\left(x + y \bullet e^{\frac{y}{x}}\right)dx - x \bullet e^{\frac{y}{x}}dy = 0$$

Solución: Se trata de una edo homogénea (todas las funciones que aparecen son homogéneas de grado 1). Así, si realizamos el cambio $y = v \bullet x$ obtendremos una edo en variables separadas:

Si $y = v \bullet x$ entonces $dy = xdv + vdx$, por lo que si sustituimos en la edo original

$$(x + v \bullet x \bullet e^{\frac{v \bullet x}{x}})dx - x \bullet e^{\frac{v \bullet x}{x}}(xdv + vdx) = 0$$

de donde

$$xdx - x^2e^vdv = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dx}{x} = e^vdv$$

Integrando ambos miembros

$$\log x = e^v + C$$

y deshaciendo el cambio obtendremos la solución general de la edo:

$$\log x = e^{\frac{y}{x}} + C$$

3. (2do parcial, mayo 2013) *Resolver*

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

Solución: La edo se puede escribir en la forma

$$\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$$

por lo que se trata de una edo homogénea (ya que las funciones $M(x,y) = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ y $N(x,y) = -x$ son homogéneas de grado 1).

Así, realizaremos el cambio dado por

$$y = vx \Rightarrow \; dy = vdx + xdv$$

Sustituyendo,

$$\left(vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2}\right)dx - x(vdx + xdv) = 0$$

y operando

$$x\sqrt{1 - v^2}\,dx = x^2dv$$

por lo que se obtiene la edo en variables separadas

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Integrando en ambos miembros

$$\log(x) = \arcsin(v) + cte$$

o lo que es lo mismo

$$\log(x) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + cte$$

4. (2do parcial, mayo 2014) *Resolver*

$$\left(3ty + \frac{\cos(t)}{t}\right)dt + \left(2t^2 + \frac{\sin(t)}{ty}\right)dy = 0$$

probando previamente que admite a $\mu(t,y) = ty$ como factor integrante.

Solución: Si multiplicamos toda la edo por $\mu(t,y) = ty$, tendremos

$$(3t^2y^2 + y\cos(t))dt + (2t^3y + \sin(t))dy = 0$$

y podemos comprobar que se trata de una edo exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6t^2y + \cos(t) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces hemos de hallar una $f(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = M(t,y) = 3t^2y^2 + y\cos(t) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(t,y) = 2t^3y + \sin(t)$$

De la primera de estas expresiones se tiene que

$$f(t,y) = \int(3t^2y^2 + y\cos(t))dt = t^3y^2 + y\sin(t) + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usaremos que $2t^3y + \sin(t) = \frac{\partial f}{\partial y}$, es decir,

$$2t^3y + \sin(t) = 2t^3y + \sin(t) + g'(y)$$

por lo que

$$g'(y) = 0$$

es decir,

$$g(y) = K$$

Por tanto, la solución general de la edo exacta (y por tanto de la edo inicial) es $f(t,y) = cte$, esto es

$$t^3y^2 + y\sin(t) + K = cte$$

o lo que es lo mismo

$$t^3y^2 + y\sin(t) = C$$

5. (2do parcial, mayo 2015) *Resolver la siguiente edo de 1er orden, probando previamente que $\mu(x,y) = xy$ es un factor integrante para la misma:*

$$2\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)dx + 3xydy = 0$$

Solución: Si multiplicamos la edo por $\mu(x,y) = xy$, se obtiene

$$2(xy^3 + x)dx + 3x^2y^2dy = 0$$

que ya sí que es exacta, puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Resolvemos entonces esta edo exacta:

De

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2(xy^3 + x)$$

resulta

$$f(x,y) = \int 2(xy^3 + x)dx = x^2y^3 + x^2 + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usarmos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = 3x^2y^2$$

por lo que

$$3x^2y^2 + 0 + g'(y) = 3x^2y^2$$

y así $g(y) = cte$.

Por tanto la solución de la edo dada nos viene dada por la expresión implícita

$$x^2y^3 + x^2 = cte$$

6. (2do parcial, mayo 2016) *Resolver los siguientes apartados:*

6.a *La edo de 1er orden*

$$2xy \cdot y' + x^2 - y^2 = 0$$

y probar que la solución obtenida efectivamente lo es.

6.b *Hallar el valor de k para que la edo de 1er orden*

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

sea exacta. Resolver la edo para dicho valor.

Solución:

(6.a) Si escribimos la edo en la forma

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

se observa que es una edo homogénea. Aplicaremos entonces el cambio de variable $y = v \cdot x$, de donde $dy = vdx + xdv$.

De esta forma resulta

$$(x^2 - v^2x^2)dx + 2x^2v(vdx + xdv) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$(x^2 + v^2x^2)dx + 2x^3vdv = 0$$

que podemos separar en la forma

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{-x^2}{2x^3}dx = -\frac{dx}{2x}$$

Integrando ambos miembros,

$$\frac{1}{2}\log(1+v^2) = -\frac{1}{2}\log x + cte$$

de donde

$$\sqrt{1+v^2}\,\sqrt{x} = k \Leftrightarrow (1+v^2)x = K$$

es decir

$$v^2 = \frac{K}{x} - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{K}{x} - 1 \Leftrightarrow y^2 = Kx - x^2$$

Para probar que esta relación nos da (de forma implícita) la solución de la edo inicial, sólo hemos de tener en cuenta que, derivando implícitamente, se verifica

$$2y \cdot y' = K - 2x$$

por lo que

$$y' = \frac{K - 2x}{2y}$$

Así, si sustituimos en la edo inicial,

$$2xy \cdot y' + x^2 - y^2 = 2xy\frac{K - 2x}{2y} + x^2 - (Kx - x^2) = 0$$

vemos que ésta se verifica, por lo que efectivamente $y^2 = Kx - x^2$ es solución de la edo inicial.

(6.b) Para que sea exacta la edo

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

se ha de cumplir que

$$\frac{\partial(y^3 + kxy^4 - 2x)}{\partial y} = \frac{\partial(3xy^2 + 20x^2y^3)}{\partial x}$$

es decir

$$3y^2 + 4kxy^3 = 3y^2 + 40xy^3 \Leftrightarrow k = 10$$

Pasemos entonces a resolver la edo exacta

$$(y^3 + 10xy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

Como ha de ser

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = y^3 + 10xy^4 - 2x$$

entonces

$$f(x,y) = xy^3 + 5x^2y^4 - x^2 + g(y)$$

y para determinar $g(y)$ usaremos que

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + 20x^2y^3$$

es decir

$$3xy^2 + 20x^2y^3 = 3xy^2 + 20x^2y^3 + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = cte$$

Por tanto, tendremos que

$$f(x,y) = xy^3 + 5x^2y^4 - x^2 + cte$$

y que la solución de la edo exacta viene dada por

$$xy^3 + 5x^2y^4 - x^2 = Cte$$

Ejercicios propuestos.

1. Determinar si el teorema de existencia y unicidad de la solución implica que los siguientes PVI tienen solución única:
   a. $y' = x^3 - y^3$; $y(0) = 6$.
   b. $y' + \cos(y) - \sin(x) = 0$; $y(\pi) = 0$.
   c. $y \cdot y' = 4x$; $y(0) = 0$.

2. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales de 1er orden:
   a. $(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1 + y)dy = 0$.

b. $y' + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
c. $(1 + e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$.
d. $(x^2 + y^2)dx - yxdy = 0$.
e. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.
f. $y' = \frac{y+x-1}{3x-y+5}$.
g. $y' = \frac{x-y+3}{2y-2x+1}$.
h. $(2x + \frac{1}{y})dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$.
i. $(\sin(y) + y\sin(x) + \frac{1}{y})dx + (x\cos(x) - \cos(x) + \frac{1}{y})dy = 0$.
j. $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$.
k. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$.
l. $(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + x^2ydy = 0$.
m. $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$.
n. $(\log(x) + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$.
o. $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy =$, sabiendo que admite un factor integrante que depende de $z = x + y^2$.

3. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales :
a. $y' = y - \log(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}$.
b. $y' - \frac{1}{x} = x^2$.
c. $xy' - y = y^2\sin(x)$.
d. $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{(x+1)^3y^2}{2}$.
e. $y' - y + 2y^2e^x = 0$.
f. $y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$, sabiendo que $y_1 = -x$ es una solución particular.
g. $y' + y^2\sin(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos(x)}$, sabiendo que $y_1 = \frac{1}{\cos(x)}$ es una solución particular.
h. $y = 2xy' + \sin(y')$.

4. Resolver los siguientes PVI:
a. $x\sin(y)dx + (x^2 + 1)dy = 0$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$.
b. $(x^2y - y^3)dx - x^3dy = 0$; $y(1) = 2$.
c. $xy' = y + xe^{y/x}$; $y(1) = \log(2)$.
d. $(ye^{2x} - 3xe^{2y})dx + \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 3x^2e^{2y} - e^y\right)dy = 0$; $y(1) = 0$.
e. $2(y\sin(2x) + \cos(2x))dx - \cos(2x)dy = 0$; $y(\pi) = 0$.
f. $(x^2 + 1)y' + 4xy = x$; $y(2) = 1$.