Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 3.1: GENERALIDADES SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES.

PROGRAMA DETALLADO:
Ecuaciones diferenciales y su clasificación.
Observaciones sobre las soluciones.
Significado geométrico de las edo y de sus soluciones.
Construcción de la ecuación diferencial dada su solución general.

Ecuaciones diferenciales y su clasificación.

¿Qué es una ecuación diferencial y qué significa?, ¿donde y como se originan las ecuaciones diferenciales?, ¿cual es su utilidad?, ¿qué hemos de hacer ante una ecuación diferencial? En los temas siguientes intentaremos dar respuesta a éstos y otros interrogantes.

Definition *Una ecuación en la que aparecen derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se llama* ***ecuación diferencial****.*

Example *Son ecuaciones diferenciales*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \qquad \left(\acute{o}\ y'' + xy(y')^2 = 0\right)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \operatorname{sen} t \qquad \left(\acute{o}\ x^{IV} + 5x'' + 3x = \operatorname{sen} t = 0\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \textit{(Ecuación de propagación del calor)}$$

Empezaremos por clasificar las ecuaciones diferenciales según que tengan una o más variables independientes:

Definition *Una ecuación diferencial que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una variable independiente se llama* ***Ecuación Diferencial Ordinaria (edo)****.*

Una ecuación diferencial que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a más de una variable independiente se llama ***Ecuación en Derivadas Parciales (EDP)****.*

Example *En el ejemplo anterior, las dos primeras son edo y la 3^a y 4^a son EDP.*

Remark *En el resto de la asignatura nos centraremos en el estudio de las edo.*

Las edo también se pueden clasificar según el orden de la derivada de mayor orden que contiene la ecuación:

Example *En el ejemplo anterior, la ecuación (1) es de 2º orden, mientras que la ecuación (2) es de 4º orden.*

Example *a)* $y' + xy + \operatorname{tag} x = 0$ *es de 1er orden.*

b) $y''' + 3y'' + 6xy - x = 0$ *es de 3er orden.*

c) $x \operatorname{sen} y + y^4 y' + 6(y''')^5 = 0$ *es de 3er orden.*

Las edo también pueden clasificarse en lineales y no lineales:

Definition *Una* ***ecuación diferencial lineal de n-simo orden*** *es una ecuación de la forma*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

(es decir, la variable y y sus derivadas aparecen sólo en 1er grado y no hay productos de y con alguna de sus derivadas, ni productos entre las derivadas. Además no hay funciones transcendentes de y o sus derivadas).

Example *a)* $y'' + 5y' + 6y = 0$ *es lineal de 2º orden.*

b) $y^{IV} + x^2 y''' + x^3 y' = xe^x$ *es lineal de 4º orden.*

c) $y'' + 5y' + 6y^2 = 0$ *es no lineal.*

d) $y'' + 5(y')^2 + 6y = 0$ *es no lineal.*

e) $y'' + 5yy' + 6y = 0$ *es no lineal.*

Cuando tenemos más de una expresión que nos relaciona las distintas variables dependientes y sus derivadas, ya sean edo o EDP, éstas se representan simultaneamente, formando un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o sistemas de ecuaciones diferenciales parciales**:

Example *Las ecuaciones del movimiento de un punto material vienen dadas por*

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right) \\ \\ \frac{d^2y}{dt^2} = g\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right) \\ \\ \frac{d^2z}{dt^2} = h\left(t,x,y,z,\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right) \end{array}\right\}$$

que es un sistema de edo de orden 2.

Example *La diferencia de potencial U entre los hilos de una línea y la intensidad I que circula por ellos están ligadas por*

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\partial U}{\partial x} = l\frac{\partial I}{\partial t} + rI \\ \\ -\frac{\partial I}{\partial x} = l\frac{\partial U}{\partial t} + gI \end{array}\right\}$$

que es un sistema en derivadas parciales de 1er orden.

Observaciones sobre las soluciones.

Definition *Dada una edo de n-simo orden* $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$*, diremos que una función* $f : I \to \mathbb{R}$*, que admite derivada hasta el orden n, es una* ***solución de la edo*** *anterior, si* $F(x,f(x),f(x),f''(x),\ldots,f(^{(n)}(x))$ *está definida* $\forall x \in I$*, y se tiene que*

$$F(x,f(x),f'(x),f''(x),\ldots,f^{(n)}(x)) = 0,\ \forall x \in I$$

Example *a)* $y'' + y = 0$ *tiene por solución* $y = f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x + 3\cos x$.

b) $x^2 + y^2 - 25 = 0$ *es solución de la edo* $x + yy' = 0$, *para* $-5 < x < 5$.

Remark *Dada la edo*

$$y' + 2y = 0$$

las funciones $y = e^{-2x}$, $y = 3e^{-2x}$, $y = \frac{1}{2}e^{-2x}$*, son soluciones de dicha ecuación. Evidentemente la función* $y = Ce^{-2x}$*, siendo C una constante arbritraria cualquiera, también es solución, y la denominaremos* ***solución general*** *de la misma.*

Definition *Dada la solución general* $y = f(x,C)$ *de una edo, asignándole valores concretos a la constante C, se obtienen las* ***soluciones particulares*** *de dicha ecuación.*

Remark *En la práctica, las soluciones particulares de una edo se obtienen generalmente a partir de* ***condiciones iniciales*** *que proporcionan el valor de la variable dependiente o de una de sus derivadas (si es una edo de orden n) para un valor particular de la variable independiente. Al conjunto formado por la edo y las condiciones iniciales se le llama* ***Problema de Valor Inicial (PVI)***.

Example *Verificar que* $y = x^2 + C$ *es solución de* $y' = 2x$*. Hallar la solución particular determinada por* $y(1) = 4$.

Example *Demostrar que* $x^2 + y^2 = C^2$ *es solución de* $y' = -\frac{x}{y}$ *y encontrar la solución particular tal que* $y(3) = 4$.

Example *Demostrar que* $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ *es una solución de* $y'' + y' - 6y = 0$.

Encontrar la solución particular tal que $y(0) = 6, y'(0) = 2$.

Remark *Como se ha comentado antes, por lo general, para poder encontrar una solución particular, el número de condiciones iniciales debe de igualarse al número de constantes de la solución general.*

Significado geométrico de las edo y de sus soluciones.

A partir de ahora nos vamos a centrar en las edo de 1er orden, es decir en ecuaciones de la forma $F(x,y,y') = 0$ o de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \textbf{(Forma Normal)}$$

Recordemos que una función real $G(x)$ puede ser representada por una curva $y = G(x)$ en el plano XY, y que el valor de su derivada $G'(x)$ puede interpretarse como la pendiente de la curva $y = G(x)$ en el punto x.

Así, la edo $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ puede ser interpretada geométricamente de la siguiente manera: Se quiere encontrar una curva que en el punto (x,y) tenga por tangente una recta cuya pendiente sea $f(x,y)$. Por tanto, resolver el PVI

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\}$$

consiste en hallar la(s) curva(s) que, pasando por el punto (x_0,y_0) tenga(n) la propiedad de que las pendientes de las rectas tangentes coincidan con $f(x,y)$ en (x_0,y_0).

Supongamos que $y' = f(x,y)$ tiene por solución general $y = F(x,C)$. Esta solución general, también llamada **Familia Uniparamétrica**, se representa en el plano por una familia de curvas (llamadas **Curvas Integrales** o **haz de curvas**), las pendientes de las cuales están dadas por la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$.

Example *Sea $y' = 2x$. La solución general de esta edo es $y = x^2 + C$, cuyas gráficas (curvas integrales) son una familia de parábolas. La pendiente de cada una de estas parábolas viene dada por la ecuación diferencial (cada una de estas parábolas tiene por pendiente $2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, en el punto (x,y)).*

Construcción de la ecuación diferencial dada su solución general.

Dada la familia uniparamétrica de funciones $F(x,y,C) = 0$ nos preguntamos si esta función define implícitamente a la solución general de alguna edo de 1er orden. Para ello, si derivamos respecto de x en la expresión $F(x,y(x),C) = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial F(x,y,C)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y,C)}{\partial y} y' = 0$$

Sólo hemos de eliminar C y se obtendrá una expresión $G(x,y,y') = 0$, que es la ecuación diferencial de la que $F(x,y,C) = 0$ es la solución general.

Example *Encontrar la edo cuya solución general es $y = Cx^2$.*

Solución: Si derivamos, $y' = 2Cx$. A partir de esta ecuación y de la ecuación *original* $y = Cx^2$ *se obtiene (eliminamos C en ambas ecuaciones)*

$$y' = 2\frac{y}{x^2}x = \frac{2y}{x}$$

que es la edo cuya solución general es la dada.

Example *Idem para la familia de círculos con centro en la recta* $y = x$, *y que son tangentes al eje* $0Y$.

Solución: La familia de círculos es

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = C^2$$

Si derivamos, resulta

$$2(x - C) + 2(y - C)y' = 0$$

de donde

$$C = \frac{x + yy'}{1 + y'}$$

y si se sustituye este valor en la ecuación de la familia, se obtiene

$$(x - y)^2\left(1 + (y')^2\right) = (x + yy')^2$$