

Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 2.2: INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN. APLICACIONES

PROGRAMA DETALLADO:

Introducción.

Integral doble de una función acotada en un rectángulo de \mathbb{R}^2 : Definición y propiedades.

Integrales iteradas: Teorema de Fubini:

Integración sobre regiones más generales.

Cambio de variables en la integral múltiple. Casos particulares para las integrales dobles y triples.

Aplicaciones de la integral múltiple:

Integral doble.

Integral triple.

Ejercicios resueltos.

Ejercicios propuestos.

Introducción.

Las integrales iteradas o integrales múltiples son una extensión natural del concepto, ya estudiado en el tema 9, de integral definida de Riemann sobre un intervalo $[a, b]$. Resultarán de especial interés por sus aplicaciones, las extensiones a funciones de dos variables sobre dominios acotados de \mathbb{R}^2 (**integral doble**) y de funciones de tres variables sobre dominios acotados de \mathbb{R}^3 (**integral triple**).

Las notaciones usuales que se emplean para este tipo de integrales, en coordenadas cartesianas, son:

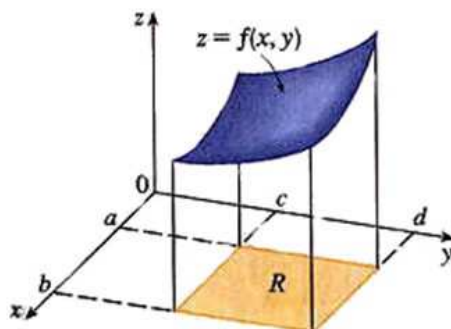
FUNCIÓN	DOMINIO	NOTACIÓN
$f(x)$	$[a, b] \subset \mathbb{R}$	$\int_a^b f(x) dx$
$f(x, y)$	$D \subset \mathbb{R}^2$	$\iint_D f(x, y) dx dy$
$f(x, y, z)$	$V \subset \mathbb{R}^3$	$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$
$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	$I \subset \mathbb{R}^n$	$\int \cdots \int_I f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$

Como en el caso de la integral simple de Riemann, las definiciones de estas integrales a través de límites de sumas tienen un carácter abstracto. No obstante, sus diversas interpretaciones darán lugar a una gran variedad de aplicaciones, sobre todo en Física e Ingeniería.

Como caso particular de la integral múltiple, la integral doble de Riemann vendrá a formalizar un concepto sencillo e intuitivo, el de volumen, de manera que uno de los objetivos de este tema será el de dar sentido a la expresión

$$V = \iint_D f(x,y) dx dy$$

siendo D un dominio cerrado de \mathbb{R}^2 y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en D , de forma que V será un número que representará, si $f(x,y) \geq 0$, el volumen de la región de \mathbb{R}^3 comprendido entre la superficie $z = f(x,y)$ y su proyección sobre D , como se observa en la siguiente figura (en la gráfica el recinto de integración aparece representado como el rectángulo R):



Va a existir una gran similitud entre las definiciones (y por tanto, de propiedades y aplicaciones), de la integral múltiple con las ya estudiadas para la integral simple de Riemann. De hecho, se intentará, en lo posible, seguir un camino totalmente paralelo: En síntesis, el proceso consistirá en plantear particiones cada vez más finas del dominio de integración, lo que permitirá definir la integral superior y la inferior; de aquí, se llegará a la definición de integral múltiple de Riemann de una función acotada en un intervalo compacto de \mathbb{R}^n a través de un límite, cuando el diámetro de la partición tiende a cero.

No obstante, y aunque al introducción del concepto de integral múltiple puede hacerse directamente para \mathbb{R}^n , se introducirá por separado para la integral doble (y de forma semejante se hará para la integral triple). Como Apéndices se introducirán las integrales de línea y de superficie, aunque no son materia para esta asignatura (se estudiarán en la asignatura de Matemáticas II).

Integral doble de una función acotada en un rectángulo R de \mathbb{R}^2 : Definición y propiedades.

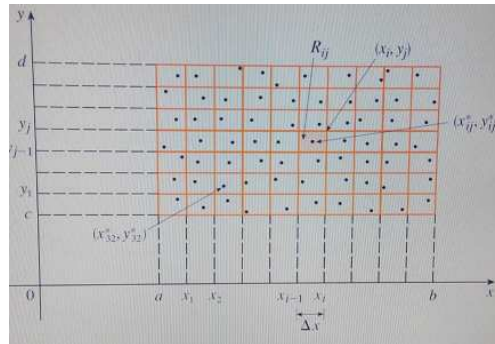
Definition Se llama **rectángulo** de \mathbb{R}^2 al conjunto definido por

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Definition Se llama **partición \mathbf{P}** del rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ a un conjunto $\mathbf{P} = P_1 \times P_2$, donde P_1 es una partición del intervalo real $[a, b]$ y P_2 es una partición del intervalo $[c, d]$.

De esta forma, si P_1 divide a $[a, b]$ en m subintervalos unidimensionales y P_2 divide a $[c, d]$ en n subintervalos, $\mathbf{P} = P_1 \times P_2$ determinará una descomposición de $[a, b] \times [c, d]$ en $m \cdot n$

subrectángulos, a los que denotaremos por $R_{11}, R_{12}, \dots, R_{mn}$. Una ilustración de este concepto aparece en el siguiente gráfico:



Definition Se llama **norma de la partición \mathbf{P}** de $R = [a, b] \times [c, d]$, y se representa por $\|\mathbf{P}\|$, al máximo área de los subrectángulos en los que \mathbf{P} divide al rectángulo R .

Definition Una partición \mathbf{P} de $[a, b] \times [c, d]$ se dice que es **más fina** que otra partición \mathbf{Q} de $[a, b] \times [c, d]$, si cada P_i es más fina que la correspondiente Q_i (es decir, si todo subrectángulo de \mathbf{Q} es unión de subrectángulos de \mathbf{P}) y si $\|\mathbf{P}\| < \|\mathbf{Q}\|$. Lo representaremos por $\mathbf{P} \triangleleft \mathbf{Q}$.

Sea entonces $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo compacto de \mathbb{R}^2 , $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y \mathbf{P} una partición de R en subintervalos $R_{11}, R_{12}, \dots, R_{mn}$. En cada uno de los subrectángulos se consideran los valores extremos que alcanza f , a los que denotaremos por

$$m_{ij} = \inf\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}); (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{ij}\}, M_{ij} = \sup\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}); (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R_{ij}\}.$$

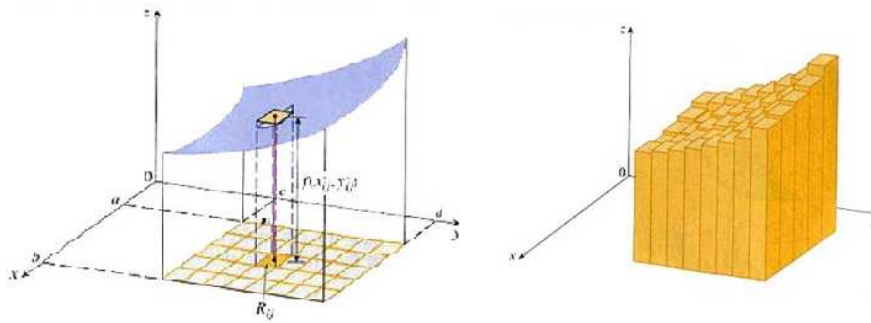
Definition Llamaremos **suma inferior** y **suma superior** de la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ respecto de la partición \mathbf{P} en $[a, b] \times [c, d]$, a los números reales definidos, respectivamente, por

$$s(f, \mathbf{P}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j); S(f, \mathbf{P}) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

Remark Por lo tanto, el volumen del cuerpo que limita la superficie $z = f(x, y)$ estará comprendido entre $s(f, \mathbf{P})$ y $S(f, \mathbf{P})$, es decir

$$s(f, \mathbf{P}) \leq V \leq S(f, \mathbf{P})$$

Podemos observar gráficamente, al igual que ocurre con la integral simple, como estas sumas aproximan el volumen que queremos obtener:



(la suma inferior aproximaría el volumen "por debajo", mientras que la suma superior lo aproximaría "por encima").

Enunciaremos ahora unas propiedades, que verifican este tipo de sumas, cuyas demostraciones son análogas a las de la integral simple de Riemann, y que serán de gran utilidad en la definición de la integral múltiple:

Proposition *En las anteriores condiciones, si $\mu(R)$ es el área del rectángulo compacto $R = [a, b] \times [c, d]$, es decir $\mu(R) = (b - a)(d - c)$, y si denotamos por $m = \inf \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}); (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R\}$, $M = \sup \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}); (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R\}$, se verifican:*

$$(a) s(f, \mathbf{P}) \leq S(f, \mathbf{P}).$$

$$(b) s(f, \mathbf{P}) \geq m \cdot \mu(R).$$

$$(c) S(f, \mathbf{P}) \leq M \cdot \mu(R).$$

es decir,

$$m \cdot \mu(R) \leq s(f, \mathbf{P}) \leq S(f, \mathbf{P}) \leq M \cdot \mu(R)$$

Proposition *En las anteriores condiciones, sean \mathbf{P} y \mathbf{Q} dos particiones del rectángulo compacto $R = [a, b] \times [c, d]$, con $\mathbf{P} \prec \mathbf{Q}$. Entonces:*

$$(a) s(f, \mathbf{P}) \geq s(f, \mathbf{Q}).$$

$$(b) S(f, \mathbf{P}) \leq S(f, \mathbf{Q}).$$

Remark *La anterior propiedad nos indica que cuanto mayor sea el número de subrectángulos que tomemos en una partición del rectángulo inicial, tanto mejor será la aproximación al volumen que se obtiene. Se observará mejor en la gráfica que se incluye en el primer ejemplo desarrollado más adelante.*

Proposition *Si \mathbf{P} y \mathbf{Q} son dos particiones arbitrarias del rectángulo compacto $R = [a, b] \times [c, d]$, siempre se verifica que $s(f, \mathbf{P}) \leq S(f, \mathbf{Q})$.*

De esta forma, observamos que si se toman particiones cada vez más finas del rectángulo compacto $R = [a, b] \times [c, d]$ y con norma tendiendo a 0, se obtiene una sucesión monótona creciente de sumas inferiores y una sucesión monótona decreciente de sumas superiores. Como la

primera sucesión

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$$

está acotada superiormente por $M \cdot \mu(R)$, y la segunda sucesión

$$S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_n \geq \dots$$

está acotada inferiormente por $m \cdot \mu(R)$, ambas sucesiones serán convergentes. Así, tiene sentido considerar la siguiente definición:

Definition Se llama **integral inferior de Riemann** de f en el rectángulo $R=[a,b] \times [c,d]$, y se representa por $\int_{-R} f$, al número límite de la sucesión de sumas inferiores obtenidas al considerar una sucesión de particiones de R cada vez más finas y con norma tendiendo a cero; se llama **integral superior de Riemann** de f en R , y se representa por $\int_R^- f$, al límite de la correspondiente sucesión de sumas superiores; es decir,

$$\int_{-R} f = \lim_n \{s(f, \mathbf{P}_n); \dots \angle \mathbf{P}_n \angle \mathbf{P}_{n-1} \angle \dots \angle \mathbf{P}_1, \|\mathbf{P}_n\| \rightarrow 0\}$$

y

$$\int_R^- f = \lim_n \{S(f, \mathbf{P}_n); \dots \angle \mathbf{P}_n \angle \mathbf{P}_{n-1} \angle \dots \angle \mathbf{P}_1, \|\mathbf{P}_n\| \rightarrow 0\}$$

Remark Notemos como la integral inferior aproxima al volumen "por debajo", mientras que la integral superior lo aproxima "por encima". Además, se verifica de forma inmediata,

$$\int_{-R} f \leq \int_R^- f$$

Definition En las anteriores condiciones, se dice que una función acotada $f: [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es **integrable Riemann** (o simplemente **integrable**) en el intervalo R si

$$\int_{-R} f = \int_R^- f$$

es decir, si el valor que se obtiene al aproximar por las sumas inferiores coincide con el valor de aproximar por las sumas superiores.

En tal caso, al número real definido por cualquiera de ellas se le llama **integral doble de Riemann** de f en rectángulo compacto $R = [a,b] \times [c,d]$ y se representa por

$$\iint_R f(x,y) dx dy$$

Veamos unas propiedades análogas a las ya conocidas para el caso de la integral simple:

Proposition (Criterio de integrabilidad de Riemann). Sea R el rectángulo compacto $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Entonces, f es integrable Riemann en R si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de R tal que $S(f, \mathbf{P}) - s(f, \mathbf{P}) < \varepsilon$.

Al igual que ocurre en el caso de la integral simple, otra forma de calcular el valor de una integral doble, supuesta que la función $f(x,y)$ es integrable en el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ es

por medio de las llamadas **sumas de Riemann**, que son expresiones de la forma

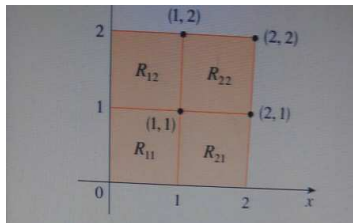
$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta R_{ij}$$

siendo (ξ_i, η_j) un punto cualquiera del subrectángulo R_{ij} y ΔR_{ij} el área del mismo.

Estas sumas tienen la ventaja (sobre las sumas superior e inferior establecidas anteriormente) que no hemos de conocer el valor máximo y/o mínimo que alcanza la función en cada subrectángulo de la partición, sino que podemos considerar el valor que queramos de los que toma f en el mismo.

Remark Desde un punto de vista gráfico, se puede observar como la aproximación que nos dan estas sumas del volumen que se pretende obtener es tanto mejor conforme se van considerando particiones cada vez más finas (es decir, tomando más subrectángulos en la partición). Se ilustra en el siguiente ejemplo.

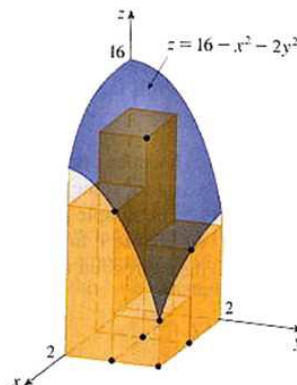
Example Supongamos que queremos aproximar el volumen comprendido entre el cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y el paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Para ello dividiremos el rectángulo R en 4 cuadrados iguales y tomaremos como punto (ξ_i, η_j) la esquina superior derecha de cada cuadrado R_{ij} .



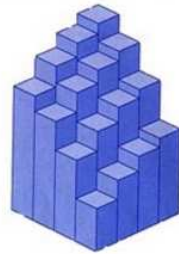
Si aproximamos el volumen mediante la correspondiente suma de Riemann, tendremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\xi_i, \eta_j) \Delta R_{ij} &= f(1,1) \Delta R_{11} + f(1,2) \Delta R_{12} + f(2,1) \Delta R_{21} + f(2,2) \Delta R_{22} = \\ &= 13 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 34 \end{aligned}$$

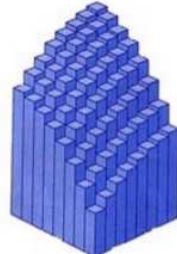
Este es el volumen de las cajas rectangulares que se muestra en la figura siguiente:



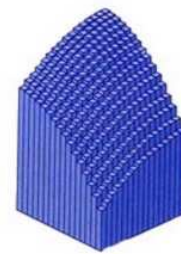
Observamos que se obtienen mejores aproximaciones para este volumen si se aumentan el número de subrectángulos de R . En la figura siguiente se muestra cómo las columnas comienzan a verse más como sólidos reales y las aproximaciones correspondientes se vuelven más exactas cuando se usan 16, 64 y 256 cuadrados. En la siguiente sección se podrá mostrar que el volumen exacto es 48:



$m=n=4, V=41.5$



$m=n=8, V=44.875$



$m=n=16, V=46.46875$

Remark A raíz de todo lo anterior, el valor de la integral doble sobre el rectángulo R también vendrá dado por el **límite de las sumas de Riemann**, según vamos tomando particiones cada vez más finas, es decir, se tiene que, suponiendo f función integrable en el rectángulo R ,

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta R_{ij}$$

siendo (ξ_i, η_j) un punto cualquiera del subrectángulo R_{ij} y ΔR_{ij} el área del mismo.

En base a las consideraciones anteriores, también podemos demostrar los siguientes resultados:

Proposition Si $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en R , entonces f es integrable en R . Si f es continua en R salvo en un número finito de puntos, entonces f también es integrable en R .

Proposition Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas e integrables en R . Entonces:

(a) $f \pm g$ es integrable en R y $\iint_R (f \pm g) = \iint_R f \pm \iint_R g$.

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es integrable en R y $\iint_R (\lambda f) = \lambda \iint_R f$.

(c) El producto $f \cdot g$ es integrable en R .

(d) El cociente $\frac{f}{g}$ es integrable en R , donde se supone que $|g(x,y)| \geq k$, $\forall (x,y) \in R$ y para un cierto $k > 0$.

(e) Si $f \geq 0$ en R , se tiene que $\iint_R f \geq 0$.

(f) Si $f \leq g$ en R , se tiene que $\iint_R f \leq \iint_R g$.

(g) $|f|$ es integrable en R y $|\iint_R f| \leq \iint_R |f|$.

(h) Si \mathbf{P} es una partición de R en m rectángulos R_1, R_2, \dots, R_m , f es integrable en R si y sólo si f es integrable en cada R_k ($k = 1, 2, \dots, m$), y se verifica

$$\iint_R f = \sum_{k=1}^m \iint_{R_k} f$$

Proposition (Teorema de la media) Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada en el rectángulo compacto $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Se verifica que existe algún punto $(c_1, c_2) \in R$ tal que

$$\iint_R f = f(c_1, c_2) \cdot \mu(R)$$

siendo $\mu(R)$ el área de R , es decir $\mu(R) = (b - a)(d - c)$.

Integrales iteradas: Teorema de Fubini.

El proceso que acabamos de desarrollar para el cálculo de la integral múltiple (OJO: hasta ahora siempre hemos introducido el concepto para el caso de la integral doble, aunque de forma similar se puede hacer para la triple), también conocido como proceso de **aproximaciones sucesivas**, al igual que ocurría con el caso de la integral simple, tiene más interés teórico que práctico: basta con intentar calcular cualquier integral múltiple mediante este procedimiento para comprender que este cálculo ha de realizarse por otros procedimientos. Desde el punto de vista práctico, la herramienta básica para el cálculo de estas integrales es un resultado conocido como **teorema de Fubini** y que nos permitirá reducir el cálculo de integrales dobles a integrales simples. Lo mismo ocurrirá en el caso de la integral triple.

Teorema de Fubini en un rectángulo.

Normalmente, en el caso $n = 2$, al intervalo compacto $[a, b] \times [c, d]$, que es un rectángulo, lo representaremos por R , mientras que en el caso $n = 3$, a R , que es un paralelepípedo (es decir, una caja de zapatos), lo representaremos por V .

Proposition (Teorema de Fubini en un rectángulo). Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida, acotada e integrable en $R = [a, b] \times [c, d]$. Supongamos que para cada $x \in [a, b]$ fijo, la integral $\int_c^d f(x, y) dy$ existe y vale $A(x)$. Entonces la integral $\int_a^b A(x) dx$ también existe y su valor coincide con $\iint_R f(x, y) dx dy$, es decir

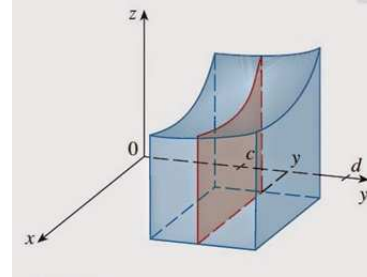
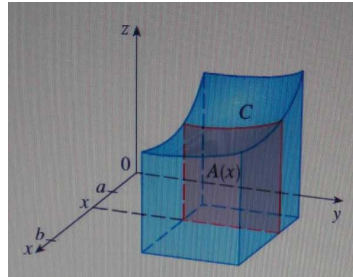
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Análogamente, si suponemos que para cada $y \in [c, d]$ fijo, la integral $\int_a^b f(x, y) dx$ existe y vale $A(y)$, también existirá $\int_c^d A(y) dy$ y su valor coincide con $\iint_R f(x, y) dx dy$, es decir

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Remark A las integrales $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$, $\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$, si existen, se les llaman **integrales iteradas** de f en R . Cuando f es continua, ambas integrales reiteradas existen y son iguales. Por ello, a la hora de calcular el valor de una integral doble en un rectángulo es indiferente el orden de integración que se realice, es decir, podemos integrar primero respecto de x (considerando que la y es constante) y

después el resultado obtenido (y que dependerá de y) respecto de y , o al revés, es decir, primero respecto de la variable y (considerando que x es constante) y después respecto de x . La respectiva interpretación gráfica de ambas integrales iteradas la podemos observar en las siguientes gráficas:



Example Calcular la integral del ejemplo de los gráficos de la sección anterior, es decir

$$\iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dx dy$$

en $R = [0, 2] \times [0, 2]$.

Example Calcular $\iint_R (x + y) dx dy$ en $R = [0, 1] \times [0, 2]$.

Example Calcular $\iiint_V (xy + z) dx dy dz$, siendo $V = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$.

Remark Notemos con este último ejemplo, que no es preciso integrar primero respecto de z , después respecto de y y por último respecto de x . Por el contrario, es aconsejable elegir las iteraciones de modo que el cálculo de cada una de las integrales iteradas sea lo más simple posible. Esto no tiene demasiada importancia cuando el dominio de integración es un rectángulo o un paralelepípedo, aunque si lo tendrá cuando consideremos dominios más generales, como se verá en la sección siguiente.

Remark Normalmente, y cuando se van a calcular integrales múltiples, en lugar de expresar

$$\iiint_V (xy + z) dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_2^3 (xy + z) dz \right] dy \right] dx$$

o cualquier otra posible combinación existente entre las 3 variables, por comodidad y por aclarar aún más el intervalo de variación de cada variable, expresaremos

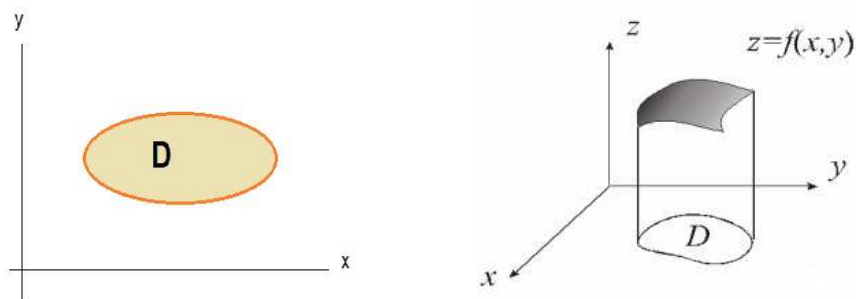
$$\iiint_V (xy + z) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_2^3 (xy + z) dz$$

expresando implícitamente que no se trata de un producto de tres integrales, sino que se han de calcular las integrales iteradas comenzando siempre por la situada más a la derecha.

Integración sobre regiones más generales.

Si la región de integración en \mathbb{R}^n ($n = 2$ o 3) en lugar de ser un intervalo compacto fuese un conjunto cualquiera de \mathbb{R}^n ($n = 2$ o 3) y $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, el teorema de Fubini anteriormente enunciado va a poder extenderse sin dificultad a estos nuevos conjuntos siempre que el dominio D cumpla alguna condición de "regularidad" (en nuestro caso, supondremos que su contorno estará formado por curvas continuas), como veremos a continuación.

Así, supongamos que pretendemos calcular la integral doble de una función $f(x,y)$ en una región plana D como aparece en la figura siguiente (es decir, lo que pretendemos es calcular el volumen comprendido entre nuestra superficie dada $f(x,y)$ por y la región D , suponiendo que $f(x,y) \geq 0$ en D):

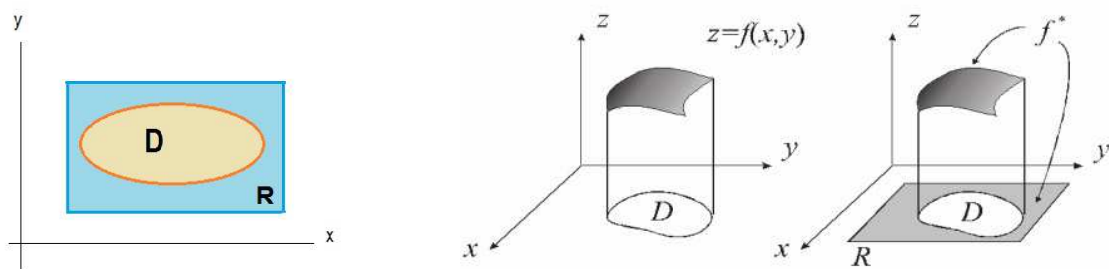


Lo que haremos, al menos teóricamente, será "encerrar" la región D en un rectángulo R , y definir una función $f^*(x,y)$ dada por

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R \text{ pero } (x,y) \notin D \end{cases}$$

de manera que entonces definiremos la integral de f sobre D como la integral de f^* sobre R , es decir

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R f^*(x,y) dx dy$$



Remark El procedimiento que usamos es lógico, porque los valores de $f^*(x,y)$ son 0 cuando (x,y) está fuera de D y, por consiguiente, no contribuyen al valor de la integral sobre D . Esto significa que no importa qué rectángulo R se use, siempre y cuando contenga a D .

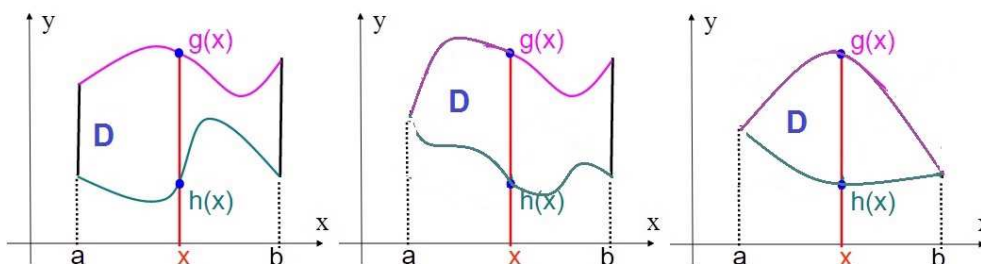
Desde un punto práctico, el resultado que nos va a interesar es la extensión del Teorema de Fubini sobre un rectángulo a estas regiones más generales, siempre y cuando las mismas sean de algún tipo determinado. En concreto, se verifica:

Proposition (Teorema de Fubini en dominios más generales).

Sean $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas, con $g_1(x) \leq g_2(x)$,
 $\forall x \in [a, b]$, y sea D el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\}$.
 Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y continua en S , entonces f es integrable en D y se verifica

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

La afirmación del teorema anterior es válida para regiones del tipo



En la práctica, para hallar los límites de integración, primero se examina la variación de x ($a \leq x \leq b$); fijado entonces un valor de x arbitrario entre a y b , la ordenada y de los puntos de I varía entre $h(x)$ y $g(x)$. Lo vemos con el siguiente ejemplo:

Example Calcular $\iint_D xy dx dy$, siendo D la región del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ comprendida entre $y = x$ y la curva $y = x^2$.

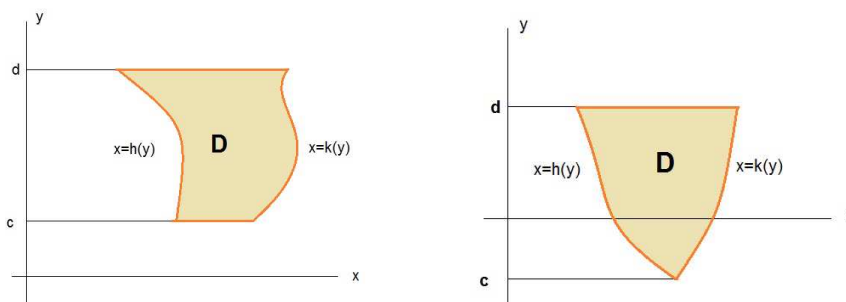
Remark No siempre es obligatorio fijar $x \in [a, b]$ y hacer variar y , sino que el mismo teorema anterior también es válido para el caso en que D sea de la forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; h(y) \leq x \leq k(y), c \leq y \leq d\}$$

con lo que se tendría

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h(y)}^{k(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Remark Notemos que en este último caso, la región considerada es del tipo



Remark Habitualmente, fijaremos una variable y haremos variar la otra según convenga al problema en cuestión. Por ejemplo, en el caso del ejemplo anterior es indiferente cual sea la variable que se fije.

Example Calcular $\iint_D xy dx dy$, siendo D el dominio definido por la intersección de los círculos $x^2 + y^2 \leq 1$, $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

Example Calcular

$$\iint_D x \cdot e^{-\frac{x^2}{y}} dx dy$$

extendida a la porción del plano delimitada por $x = 0$, $y = x^2$, $y = 1$, $y = 2$.

Remark El teorema de Fubini en dominios más generales puede extenderse sin dificultad a integrales triples, donde estamos considerando dominios de la forma

$$V = \{(x, y, z); a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}$$

o cualquier otro tipo de posibilidades entre x , y , z . La única dificultad radica en que ahora las correspondientes gráficas son en 3 dimensiones.

Veamos un ejemplo que nos muestre el sentido geométrico de cada elemento:

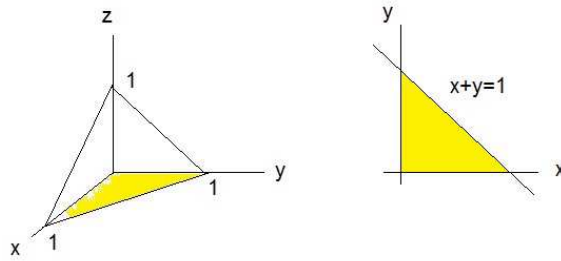
Example Consideremos la pirámide limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, y vamos a estudiar la variabilidad de cada una de las 3 variables:

Sea $P(x, y, z)$ un punto interior a la pirámide. Su proyección sobre el plano OXY es el punto $R(x, y, 0)$, mientras que la proyección de R sobre el eje OX es $S(x, 0, 0)$. Como la posición de este último punto nos indica la posible variación de la coordenada x de los puntos de nuestro recinto, tendremos que $0 \leq x \leq 1$.

Puesto que la proyección de cualquier punto del recinto varía en el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, fijado un valor para x en $[0, 1]$, la coordenada y variará entre el punto $S(x, 0, 0)$ y el punto $T(x, 1 - x, 0)$, por lo que $0 \leq y \leq 1 - x$, para cada $x \in [0, 1]$.

En definitiva, observamos que las variables x, y varían en el triángulo señalado en amarillo en la figura siguiente (que es el triángulo que forman, en el plano XY , los ejes X e Y y la recta $x + y = 1$).

Por último, la coordenada z de un punto cualquiera P cuyas coordenadas x e y estén fijas en el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, variará entre la componente z de R y la componente z de Q (donde Q representa un punto del plano $x + y + z = 1$), es decir, z varía entre $z = 0$ y el plano dado. Por tanto $0 \leq z \leq 1 - x - y$.



En resumen

$$V = \{(x,y,z); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$

De esta forma, si, por ejemplo, queremos calcular

$$\iiint_V z dx dy dz$$

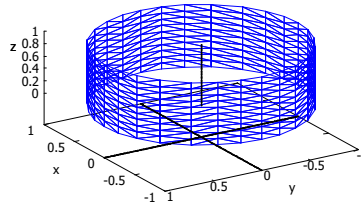
siendo V la pirámide anterior, sólo habremos de resolver

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz = \dots = \frac{1}{120}$$

Example Calcular

$$\iiint_V z dx dy dz$$

siendo V el tronco del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ limitado por los planos $z = 0$, $z = 1$.
(Solución: $\frac{\pi}{2}$)



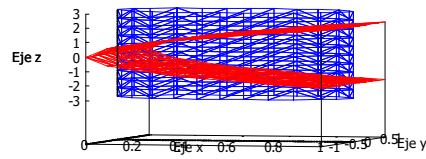
Example Calcular

$$\iiint_V x^2 y z^3 dx dy dz$$

siendo V el sólido limitado por el plano $y = 0$ y las superficies

$$S_1 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad y \quad S_2 : z^2 = 4x. \quad (\text{Solución: } 0)$$

Intersección entre S1 y S2

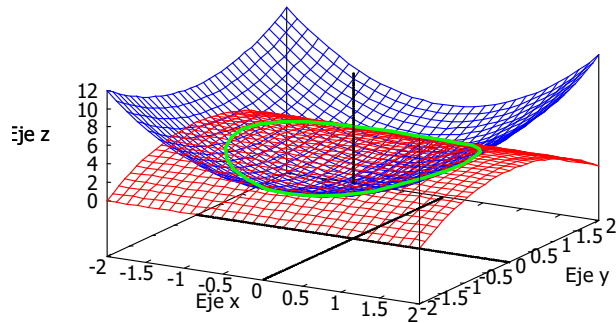


Example *Calcular*

$$\iiint_V dx dy dz$$

siendo V el sólido limitado por el paraboloido (en azul en la gráfica) $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$ (en rojo en la gráfica) en el primer octante.

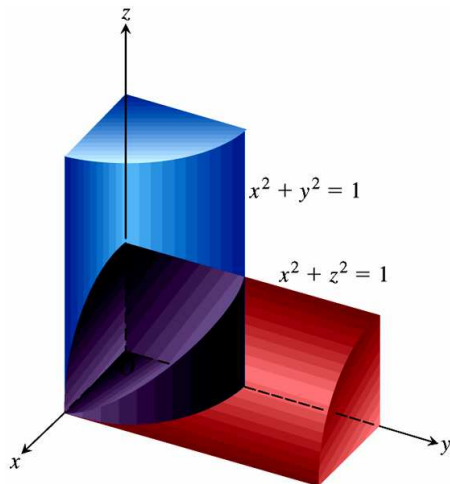
Intersección paraboloido y cilindro



Example *Calcular*

$$\iiint_V dx dy dz$$

siendo V el sólido limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ en el primer octante.



Cambio de variables en la integral múltiple. Casos particulares.

Vamos a desarrollar la teoría del cambio de variables para el caso $n = 2$ (de forma análoga se haría para $n = 3$) :

Dada $\iint_D f(x,y) dx dy$ extendida a un dominio D delimitado por la curva $F(x,y) = 0$, vamos a efectuar un cambio de variables y pasar de las variables (x,y) a unas nuevas variables (u,v) , mediante la transformación dada por

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

que supondremos biyectiva, al menos para los puntos (x,y) de D , y donde también consideraremos que el jacobiano de la transformación

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

es no nulo y es continuo y está acotado en cada punto de D . De esta forma nos aseguraremos, en virtud del teorema de la función inversa (estudiado en el tema 11), que u y v se expresan unívocamente en función de x e y . Supongamos además $\frac{\partial x}{\partial u} \neq 0$ y es continua en D .

Proposition *Bajo todas las anteriores hipótesis, se verifica*

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot J \cdot du dv$$

Remark *Para el caso de la integral triple, tendríamos*

$$\iiint_{V'} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V''} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot J \cdot du dv dw$$

Remark *Los cambios de variables en las integrales múltiples suelen utilizarse para conseguir una función integrando de la que sepamos obtener su primitiva (al igual que ocurre cuando realizamos un cambio en las integrales simples), pero también para simplificar el recinto de integración (como ocurrirá, por ejemplo con el cambio a coordenadas polares). Lo ilustramos en los dos siguientes ejemplos.*

Example *Calcular*

$$\iint_D \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy$$

siendo D el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 1$. Realizar el cambio $x = \frac{v-u}{2}$, $y = \frac{u+v}{2}$.

Example *Calcular*

$$\iint_D dx dy$$

siendo D la región del plano limitada por las gráficas de

$y = x^2, x = y^2, y = 2x^2, x = \frac{y^2}{2}$. Realizarlo en coordenadas cartesianas y también mediante el cambio de variables $u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$.

Caso particular: Cambio de variable en la integral doble.

El cambio de variable más habitual en la integral doble es el cambio a **coordenadas polares**. Especialmente este cambio se utiliza en el caso en que el dominio es algún sector circular o la función a integrar es simétrica respecto del origen.

Como es sabido, este cambio viene dado por

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

De esta manera, y al ser el jacobiano de la transformación

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

se tiene:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dr d\theta$$

Remark En la mayor parte de los casos se toma ρ como primera variable de integración (es decir, r depende de θ), de forma que

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dr$$

Example Calcular

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$$

siendo D el recinto limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Hacerlo en coordenadas cartesianas y mediante el cambio a polares.

Remark Cuando la circunferencia no está centrada en el origen de coordenadas, podemos realizar una generalización de lo anterior y aplicar el siguiente cambio:

Supongamos que la región está limitada por $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, es decir, por la circunferencia de centro (α, β) y radio r . En este caso, realizaremos el cambio

$$x = \alpha + r \cos \theta, \quad y = \beta + r \sin \theta$$

y el jacobiano sigue siendo $J = r$.

(Observemos que, con este cambio, lo que hemos conseguido es realizar una traslación, es decir, "trasladar" la circunferencia con centro (α, β) y radio r en la circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio r).

Remark Análogamente podemos actuar cuando el recinto está limitado por una elipse:

Sea D el recinto limitado por la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(elipse con centro el origen y de semiejes a y b). En tal caso, será aconsejable realizar el cambio

$$x = a \cdot r \cos \theta, \quad y = b \cdot r \sin \theta$$

de tal manera, que si se considera la elipse completa, las nuevas variables variarán: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$; mientras que el jacobiano valdrá

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr$$

También es posible considerar una elipse que esté centrada en un punto (α, β) . En tal caso, actuaremos igual que en la observación anterior (realizamos previamente una traslación para que su centro sea el origen de coordenadas).

Example Idem siendo D el recinto limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$.

Example Idem para

$$\iint_D dx dy$$

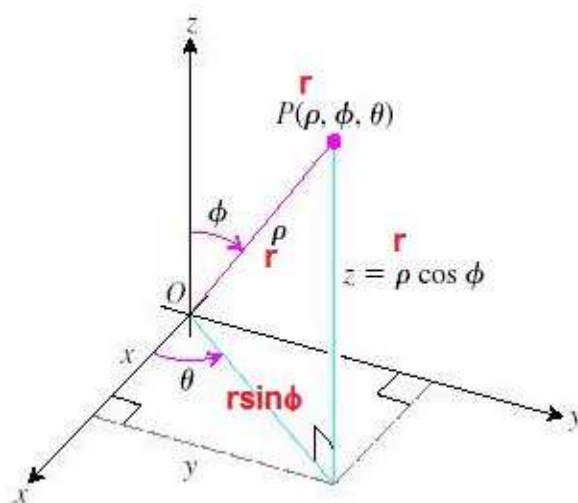
siendo D el recinto limitado por las circunferencias $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x = 0$ y las rectas $y = x$, $y = 0$.

Caso particular: Cambios de variables en la integral triple.

En este caso podemos destacar dos casos particulares: coordenadas esféricas y coordenadas cilíndricas.

Coordenadas esféricas.

Las **coordenadas esféricas (o polares esféricas)**, son análogas a las polares en el plano: cada punto P del espacio se representa por (r, θ, ϕ) , donde r es la distancia al origen y θ y ϕ vienen dadas por



De esta forma, el cambio viene dado por

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

por lo que el jacobiano de la transformación siempre valdrá

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2 \operatorname{sen} \phi$$

y sustituyendo en la fórmula del cambio de variables

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \phi) \cdot r^2 \operatorname{sen} \phi \cdot d\theta d\phi dr$$

Remark El uso de este tipo de coordenadas está especialmente indicado cuando en la frontera de V intervienen superficies esféricas y/o cónicas de eje OZ , debido a la sencillez de sus ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 &\Leftrightarrow r = R \\ x^2 + y^2 = (\tan^2 \alpha) z^2 &\Leftrightarrow \phi = \alpha \end{aligned}$$

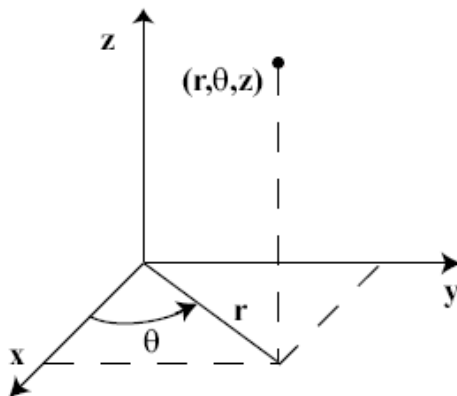
Example Calcular

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

siendo V el sólido comprendido entre $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Coordenadas cilíndricas.

Cada punto se representa por (r, θ, z) , siendo el par (r, θ) idéntico a las coordenadas polares en el plano, y z la 3ª componente en coordenadas cartesianas.



Así, se trata de realizar el cambio

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$$

por lo que el jacobiano de la transformación valdrá

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

y sustituyendo en la fórmula del cambio de variables

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cdot r \cdot d\theta dr dz$$

Remark El empleo de coordenadas cilíndricas equivale a reducir la integral triple a una integral doble sobre la proyección de V en el plano OXY y a la posterior resolución de ésta en coordenadas polares.

Remark Las coordenadas cilíndricas resultan especialmente adecuadas para dominios de integración V limitados por superficies de revolución de eje OZ , ya que en sus ecuaciones intervienen expresiones de la forma $x^2 + y^2$.

Example Calcular

$$\iiint_V \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$

siendo V la región del espacio comprendida entre $z = 0$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

Example Calcular

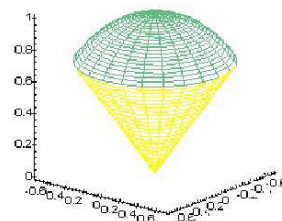
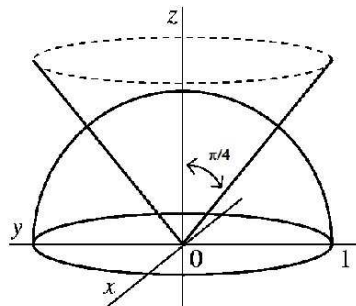
$$\iiint_V dx dy dz$$

siendo V la región del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ que es interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Example Calcular

$$\iiint_V z dx dy dz$$

con V la región definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$. Realizarlo en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.



Aplicaciones de la integral múltiple.

Integral doble.

Cálculo de volúmenes.

Si tenemos una superficie representada por una función $z = f(x, y)$, acotada y positiva $\forall (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, sabemos que el volumen limitado por dicha superficie, el cilindro de generatrices paralelas al eje OZ y el plano OXY , viene dado por

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Example Obtener, mediante integración doble, el volumen de la pirámide limitada por los planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. (Sol: 6)

Example Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloides $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano OXY . (Sol: $\frac{\pi}{2}$)

Example Hallar el volumen del sólido comprendido entre la superficie $z = xy$, el plano OXY y los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. (Sol: $\frac{3\pi}{4}$)

Cálculo de áreas de recintos planos.

Para una región plana D comprendida entre dos curvas, se verifica

$$Area(D) = \iint_D dx dy$$

Cálculo del área de una superficie.

Sea $f(x, y)$ una función continua en una región acotada D del plano OXY . El área de una superficie obtenida por la intersección de $z = f(x, y)$ con el cilindro que tiene por base D viene dada por

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

Example Hallar el área de la porción de superficie de ecuación $z = 1 - x^2 + y$ situada sobre el recinto $D = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$. (Sol:

$$\log\left(\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3})$$

Cálculo de centros de gravedad y momentos de inercia de figuras planas.

Si en el plano \mathbb{R}^2 se tienen n masas puntuales, m_1, m_2, \dots, m_n , localizadas en los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$, el centro de gravedad del sistema se define como el punto determinado por el vector

$$\vec{C} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{P}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

donde el denominador es la masa total del sistema. Si calculamos este centro de gravedad a través de sus coordenadas, tendremos

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

siendo el centro de gravedad el punto dado por $P(\bar{x}, \bar{y})$.

De esta forma, y por analogía con el caso finito, si $\rho(x,y)$ representa en cada punto la densidad superficial (unidades de masa/un. de área) de una superficie plana D , la masa de esta materia vendrá dada por

$$Masa = \iint_D \rho(x,y) dx dy$$

y las **coordenadas del centro de masas** vendrán dadas por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y) dx dy}{\iint_D \rho(x,y) dx dy}; \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y) dx dy}{\iint_D \rho(x,y) dx dy}$$

En el caso en que la distribución en D sea homogénea (es decir, $\rho(x,y) = cte, \forall(x,y) \in D$), se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{Area(D)}; \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{Area(D)}$$

Example Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la curva $y = \sin x$ y por la recta OA , siendo $A(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Para el caso de momentos de inercia, recordamos que si se tiene un conjunto de masas puntuales, éstos se calculan:

- **Momento de inercia respecto de los ejes coordenados:**

$$I_{OX} = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2; \quad I_{OY} = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2$$

- **Momento de inercia respecto del origen de coordenadas:**

$$I_O = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = I_{OX} + I_{OY}$$

Por todo esto, si el cuerpo es continuo, siendo $\rho(x,y)$ la densidad superficial:

- Momento de inercia respecto de los ejes coordenados:

$$I_{OX} = \iint_D y^2 \rho(x,y) dx dy; \quad I_{OY} = \iint_D x^2 \rho(x,y) dx dy$$

- Momento de inercia respecto del origen de coordenadas:

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x,y) dx dy = I_{OX} + I_{OY}$$

Remark Suele ser habitual considerar casos donde la distribución es homogénea, de donde (si se supone $\rho(x,y) = 1$)

$$I_{OX} = \iint_D y^2 dx dy; \quad I_{OY} = \iint_D x^2 dx dy; \quad I_O = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = I_{OX} + I_{OY}$$

Example Se considera el dominio acotado limitado por las gráficas de $y^2 = x + 1$, $x + y = 1$. Determinar las coordenadas de su centro de gravedad y el momento de inercia respecto al eje OX . (Sol: $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{5}, -\frac{1}{2})$, $I_{OX} = \frac{63}{20}$).

Integral triple.

Volumen de un cuerpo.

Otra forma de hallar el volumen V de un cuerpo es aplicar

$$\text{Volumen}(V) = \iiint_V dx dy dz$$

Example Hallar, utilizando integral triple, el volumen del recinto definido por

$$V = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z\}$$

Calcular este mismo volumen usando integral doble. (Sol:)

Example Idem para el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(Sol: $\frac{4}{3}\pi abc$)

Cálculo de centros de gravedad y momentos de inercia de cuerpos en \mathbb{R}^3 .

Por analogía a lo visto en el caso de \mathbb{R}^2 , se tiene que si $\rho(x, y, z)$ representa la densidad superficial de un cuerpo que ocupa un volumen de integración V , se tendrá:

- **Masa del cuerpo:**

$$\text{Masa} = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- **Coordenadas del centro de masas:**

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}; \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y\rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}; \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z\rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}$$

En el caso en que la distribución en D sea homogénea (es decir, $\rho(x, y, z) = cte$, $\forall (x, y, z) \in V$), se obtiene

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x dx dy dz}{\text{Vol}(V)}; \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y dx dy dz}{\text{Vol}(V)}; \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z dx dy dz}{\text{Vol}(V)}$$

Example Calcular el centro de gravedad de la región limitada por $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$, supuesta constante la densidad. (Sol: $(0, 0, \frac{4}{3})$)

Example Calcular el centro de gravedad de un sólido limitado por las regiones positivas de los tres planos coordenados y la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, suponiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al centro de la esfera. (Sol: $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{2R}{5}$)

- Momentos de inercia respecto a los planos coordenados:

$$I_{XY} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz; \quad I_{YZ} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz; \quad I_{XZ} = \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados:

$$I_X = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = I_{XY} + I_{XZ}$$

$$I_Y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = I_{XY} + I_{YZ}$$

$$I_Z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = I_{XZ} + I_{YZ}$$

- Momento de inercia respecto al origen de coordenadas:

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz = I_{XY} + I_{YZ} + I_{XZ}$$

Example Calcular el momento de inercia respecto a cada uno de los 3 ejes coordenados del volumen del paraboloido de revolución $z = x^2 + y^2$ limitado por el plano $z = a$.

Example Hallar el momento de inercia de una esfera de radio R con respecto a uno de sus diámetros (por ejemplo, el eje Z). (Sol: $\frac{8}{15} \pi R^5$)

Ejercicios resueltos.

1. (2do parcial, junio 2011) Calcular

$$\iint_D x \cdot e^{y-x} dx dy$$

siendo D la región plana encerrada por la parábola $y = x - x^2$ y sus tangentes en los puntos $(0, 0)$ y $(2, -2)$.

Solución: Las tangentes del enunciado son, como se calcula trivialmente, las rectas $y = x$ e $y = 4 - 3x$. Acudiendo al teorema de Fubini, y descomponiendo la región D en dos subregiones (la primera con $0 \leq x \leq 1$ y la segunda con $1 \leq x \leq 2$), se obtiene que

$$\begin{aligned}
\iint_D x \cdot e^{y-x} dx dy &= \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx \int_{x-x^2}^x e^y dy + \int_1^2 x \cdot e^{-x} dx \int_{x-x^2}^{4-3x} e^y dy = \\
&= \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx \cdot [e^y]_{y=x-x^2}^{y=x} + \int_1^2 x \cdot e^{-x} dx \cdot [e^y]_{y=x-x^2}^{y=4-3x} = \\
&= \int_0^1 x(1 - e^{-x^2}) dx + \int_1^2 x(e^{4-4x} - e^{-x^2}) dx = \\
&= \dots = \frac{5 - e^{-4}}{16}
\end{aligned}$$

2. Calcular, usando integración triple, el volumen del sólido comprendido entre dos esferas concéntricas de radios a y b , siendo $0 < a < b$.

Solución: Por la simetría del problema nos reduciremos al 1er octante (y multiplicaremos el volumen por 8). Así

$$Vol = 8 \iiint_V dx dy dz$$

siendo V la región, en el 1er octante, comprendida entre ambas esferas.

Vamos a calcular esta integral mediante un cambio a coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , resultando que para la región considerada se tiene $a < r < b$;

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

mientras que el jacobiano del cambio viene dado por

$$J = r^2 \sin \phi$$

Así

$$Vol = 8 \iiint_V dx dy dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^b r^2 \sin \phi \cdot dr = \dots = \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3)$$

3. (Septiembre 2013) Calcular la integral doble

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy$$

siendo D el anillo comprendido entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$.

Solución: Lo mejor es realizar un cambio a coordenadas polares, ya que en la región comprendida entre ambas circunferencias se tiene que

$$1 < r < \sqrt{5} \text{ mientras que } 0 < \theta < 2\pi, \text{ siendo } J = r$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2 + y) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{5}} ((r \cos(\theta))^2 + r \sin(\theta)) r dr = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3 \cos 2\theta - \frac{1}{3} \sin \theta + \frac{5}{3} (\sin \theta) \sqrt{5} + 3 \right) d\theta = 6\pi
\end{aligned}$$

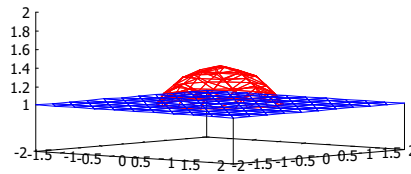
4. (2do parcial, mayo 2014) Calcular

$$\iiint_V z dx dy dz$$

siendo V el volumen situado por encima del plano $z = 1$ e interior a la esfera

$x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Calcular también el volumen de V .

Solución: La representación de la región V puede verse en la gráfica siguiente



siendo la intersección de ambas superficies el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

En un primer caso calcularemos la integral realizando un cambio a coordenadas cilíndricas, por lo que tendremos que

$$x = \rho \cos(\theta); y = \rho \sin(\theta); z = z; J = \rho$$

donde (al ser la proyección sobre el plano XY el círculo $x^2 + y^2 = 1$)

$$0 < \rho < 1; 0 < \theta < 2\pi; 1 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2} = \sqrt{2 - \rho^2}$$

Entonces

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_1^{\sqrt{2-\rho^2}} z \rho dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \left(\frac{2-\rho^2}{2} - \frac{1}{2} \right) d\rho = \dots = \frac{\pi}{4}$$

Para el volumen de V , tendremos

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_1^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho (\sqrt{2-\rho^2} - 1) d\rho = \dots \\ &= \frac{4\sqrt{2} - 5}{3} \pi \end{aligned}$$

5. (2do parcial, mayo 2015) Calcular

$$\iint_D x e^{y-x} dx dy$$

siendo D el conjunto de puntos comprendido entre la parábola $y = x - x^2$ y sus tangentes en los puntos $(0,0)$ y $(2,-2)$.

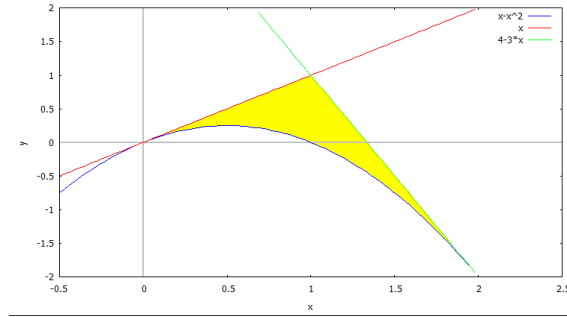
Solución: La ecuación de la tangente a $y = x - x^2$ en $(0,0)$ viene dada por

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0 + 1x = x$$

mientras que la tangente en $(2,-2)$ es

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = -2 - 3(x - 2) = 4 - 3x$$

Por tanto, el recinto de integración nos viene dado por la región coloreada de la siguiente gráfica



En dicha región, se observa que si $0 \leq x \leq 1$, entonces $x - x^2 \leq y \leq x$; mientras que si $1 \leq x \leq 2$, entonces $x - x^2 \leq y \leq 4 - 3x$. De esta forma

$$\begin{aligned} \iint_D x e^{y-x} dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^x x e^{y-x} dy + \int_1^2 dx \int_{x-x^2}^{4-3x} x e^{y-x} dy = \\ &= \int_0^1 (x - x e^{-x^2}) dx + \int_1^2 (x e^{4-4x} - x e^{-x^2}) dx = \dots = -\frac{1}{16} e^{-4} + \frac{5}{16} \end{aligned}$$

6. (2do parcial, mayo 2016) Calcular

$$\iiint_V \frac{\exp(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz$$

siendo V el volumen limitado inferiormente por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano $z = 4$.

Solución: Sólo hemos de realizar un cambio a coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad z = z; \quad J = r$$

teniendo en cuenta que (al ser la proyección en el plano OXY el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$; y que z varía entre el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$) se verifica

$$0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad 0 \leq r \leq 2; \quad r^2 \leq z \leq 4$$

De esta forma

$$\iiint_V \frac{\exp(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_{r^2}^4 \frac{e^r}{r} r dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 e^r (4 - r^2) dr = \dots = 4\pi(e^2 - 1)$$

donde la primera integral es inmediata, y la 2ª hay que hacerla dos veces por partes.

Ejercicios propuestos.

1. Calcular las siguientes integrales dobles:

a. $\iint_D xy dx dy$, siendo $D = [0, 1] \times [1, 4]$.

b. $\iint_D ye^x dx dy$, siendo $D = [-1, 1] \times [0, 2]$.

c. $\iint_D y \cos x dx dy$, siendo $D = [0, \pi] \times [1, 2]$.

d. $\iint_D y \arctan x dx dy$, siendo $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

e. $\iint_D x dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

f. $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

g. $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$, siendo D el interior del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$.

h. $\iint_D xy dx dy$, siendo D el interior del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.

- i. $\iint_D \sqrt{4-y^2} dx dy$, siendo D el recinto limitado por las curvas $y^2 = 2x$ e $y^2 = 2x - 8$.
- j. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, siendo D el recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.
- k. $\iint_D e^{xy} dx dy$, siendo D el recinto limitado por la curva $y^2 = x$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$.
2. Calcular las siguientes integrales dobles mediante un cambio a coordenadas polares:
- a. $\iint_D \exp(x^2 + y^2) dx dy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- b. $\iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- c. $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$, siendo D el recinto comprendido entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.
- d. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, siendo D la parte del círculo unidad que está en el primer cuadrante.
- e. $\iint_D \exp(x^2 + y^2) dx dy$, siendo D la parte del círculo unidad que está en el tercer y cuarto cuadrante.
3. Calcular, mediante integración doble, el área de los siguientes conjuntos :
- a. El círculo de radio R .
- b. El área encerrada por una elipse de semiejes a y b .
- c. El área del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.
- d. La región comprendida entre la recta $x + y = 5$ y la curva $xy = 6$.
4. Calcular las siguientes integrales triples:
- a. $\iiint_V y \exp(x + z) dx dy dz$ siendo $V = [0,2] \times [-1,1] \times [1,2]$.
- b. $\iiint_V xyz dx dy dz$ siendo $V = [1,2] \times [0,1] \times [0,1]$.
- c. $\iiint_V xy \cos z dx dy dz$ siendo $V = [0,1] \times [1,2] \times [0,\pi]$.
- d. $\iiint_V z dx dy dz$ siendo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
- e. $\iiint_V y^2 dx dy dz$ siendo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
- f. $\iiint_V (x + y + z^3) dx dy dz$ siendo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
5. Calcular el volumen de los siguientes conjuntos mediante integración triple:
- a. El volumen de una esfera de radio R .
- b. El volumen de un cilindro de radio R y altura h .
- c. El volumen de un cono de radio R y altura h .
6. Calcular las siguientes integrales triples mediante un adecuado cambio de variables:
- a. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ siendo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \leq 0\}$.
- b. $\iiint_V \exp \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ siendo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.
- c. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ siendo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
- d. $\iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy dz$ siendo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$.
- e. $\iiint_V y dx dy dz$ siendo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, -1 \leq z \leq 1\}$.