Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 2.1.4: TRANSFORMACIONES.

PROGRAMA DETALLADO:

Diferenciabilidad de una transformación: **Matriz jacobiana**.
Teorema de la función compuesta.
Caso particular.
Teorema de la función inversa.
Aplicación a cambios de variables.
Teorema de la función implícita.
Funciones homogéneas.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

En todo este tema nos centraremos en el estudio de funciones vectoriales $\vec{\mathbf{F}} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, también llamadas **transformaciones**. Como hemos visto en temas anteriores, una transformación $\vec{\mathbf{F}}$ está univocamente determinada por un conjunto de m funciones reales de n variables, $\vec{\mathbf{F}} = (f_1,\ldots,f_m)$, conocidas como **funciones coordenadas** o **funciones componentes** de la transformación $\vec{\mathbf{F}}$. Así, hemos establecido que para calcular el límite o estudiar la continuidad de una transformación $\vec{\mathbf{F}}$ en un punto, lo que tenemos que hacer es calcularlo o estudiarlo para cada una de sus funciones componentes.

Lo que no hemos hecho para este tipo de funciones vectoriales es extender los conceptos de diferenciabilidad y derivabilidad (parcial), cosa que vamos a realizar en este último tema de cálculo diferencial para funciones de varias variables.

Por comodidad de escritura, a partir de ahora no incluiremos la flecha $\rightarrow$ para indicar una función vectorial $\vec{\mathbf{F}}$; simplemente la escribimos en negrita $\mathbf{F}$ (como ya venimos haciendo con los puntos $\mathbf{a} \in D$).

Diferenciabilidad de una transformación: Matriz jacobiana.

Definition *Se dice que una transformación $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dada por $\mathbf{F} = (f_1,\ldots,f_m)$, es **diferenciable en un punto** $\mathbf{a} \in D$, si cada función coordenada $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{a} \in D$.*

Proposition *La diferencial de toda transformación $\mathbf{F} = (f_1,\ldots,f_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (suponiendo que ésta es diferenciable en $\mathbf{a} \in D$) lleva asociada una matriz $m \times n$ dada por*

$$A = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_j}\right), \text{ con } i \in \{1,\ldots,m\} \text{ y } j \in \{1,\ldots,n\}$$

es decir

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{a})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

que se denomina ***matriz jacobiana*** *de la transformación, y suele denotarse por* $J\mathbf{F}(\mathbf{a})$.

Remark *Recordamos que a la diferencial de una función* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(suponiendo ésta diferenciable en* $\mathbf{a} \in D$*), se le asocia un vector (****vector gradiente*** *de* f *en* $\mathbf{a}$*), dado por*

$$\overrightarrow{\nabla f(\mathbf{a})} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n} \right)$$

De esta forma, observamos que la matriz jacobiana generaliza el concepto del vector gradiente, ya que las filas de la misma, no son sino los vectores gradientes de cada una de las funciones componentes f_i *de la transformación.*

Example *Calcular la matriz jacobiana de la transformación* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2 - yz + z^2, xyz)$.

Teorema de la función compuesta.

Como ocurre en el estudio de funciones de una variable, la herramienta clave para el cálculo diferencial de funciones de varias variables (y/o transformaciones) va a ser la diferenciación de funciones compuestas o *regla de la cadena*:

Theorem *(Regla de la cadena) Sea* $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$, *con* U *y* V *abiertos, y sea* $\mathbf{G} : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. *Si* $\mathbf{F}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a} \in U$ *y* $\mathbf{G}$ *es diferenciable en* $\mathbf{F}(\mathbf{a}) \in V$, *entonces la transformación compuesta* $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$. *Además, la diferencial de la composición viene dada por*

$$d(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(\mathbf{a}) = d\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{a})) \circ d\mathbf{F}(\mathbf{a})$$

igualdad que se expresa mejor por medio de las matrices jacobianas asociadas a cada una de las diferenciales, de manera que se verifica

$$J(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(\mathbf{a}) = J\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{a})) \times J\mathbf{F}(\mathbf{a})$$

Example *Sean* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *y* $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, *dadas por* $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, xy, y^2)$ *y* $\mathbf{G}(u,v,t) = (u+v+t, u-v-2t, 2u+3v, uvt)$. *Obtener la matriz jacobiana de la composición* $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$.

Example *(2do parcial, mayo 2014) Dadas* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *y* $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definidas por*

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}, x^2 - y^2, \pi(xy + y^2)\right)$$

$$\mathbf{G}(u,v,w) = (v + \log(u), \sin(v + w))$$

calcular la matriz jacobiana de la composición $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ *en el punto* $(1,1)$.

Example *(2do parcial, junio 2012) Sean* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *y* $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *funciones definidas por*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2 + y^2,\ xyz,\ z^2 - x^2\right)$$
$$\mathbf{G}(u,v,w) = \left(\cos(u+w),\ e^v\right)$$

Calcular la matriz jacobiana de $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ *en el punto* $(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

Caso particular.

El caso en el que más se suele utilizar el teorema anterior, es aquel en el que $p = 1$, es decir, se trata de la composición de la transformación $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ con la función de varias variables $g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, de manera que $g \circ \mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, por lo que su matriz jacobiana asociada a su diferencial tendrá dimensiones $1 \times n$; es decir, es un vector columna. Por tal motivo, es más sencillo observar que cada una de las componentes de dicho vector vienen dada por la expresión

$$\frac{\partial (g \circ \mathbf{F})(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g(\mathbf{F}(\mathbf{a}))}{\partial y_j} \frac{\partial f_j(\mathbf{a})}{\partial x_i},\ \forall i \in \{1,\ldots,m\}$$

con lo que se obtiene un conjunto de m ecuaciones escalares que nos proporcionarán una regla para calcular de forma directa las derivadas de la función compuesta.

Example *Obtener la matriz jacobiana de la composición* $g \circ \mathbf{F}$*, siendo* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por* $\mathbf{F}(x,y) = \left(2x + 3y,\ xy\right)$*, y* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dada por* $g(u,v) = uv$.

Suele ser habitual que en este caso particular los ejercicios vengan enunciados de la forma siguiente:

Example *Resolver los siguientes ejercicios, en primer lugar calculando la composición (es decir, expresando z en función de t) y, en segundo lugar, por la regla de la cadena.*

a) Si $z(x,y) = \sqrt{x} + y^2$*, siendo* $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = 1 + \log(t-1) \end{cases}$*, calcular* $\frac{dz}{dt}$.

b) Si $z(x,y) = \sqrt{x} + y^2$*, siendo* $\begin{cases} x = e^{-2t+s} \\ y = s^2 + \log(t-1) \end{cases}$*, calcular* $\frac{\partial z}{\partial t}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial s}$.

c) Si $u(x,y,z) = x\log(y) + e^{yz}$*, siendo* $\begin{cases} x = 2r - 3s + 4t \\ y = \frac{r}{s} \\ z = \frac{t}{r} \end{cases}$*, calcular* $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Example *(2do parcial, mayo 2013) Si* $z = 2x^2 - 3y^3$*, con* $x = u + v + w$ *y* $y = u^2v^2w^2$*, calcular* $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, *y* $\frac{\partial z}{\partial w}$.

Example *(2do parcial, mayo 2016) Sea* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$u(x,y,z) = (x+y)^4 + y^2(z+x)^3$$

con

$$x = r \cdot s \cdot e^{-t}; \qquad y = r \cdot s \cdot \log(1+t^2); \qquad z = r^2 \cdot s \cdot \cos t$$

Calcular, usando la regla de la cadena, ∇u*, cuando* $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$.

Teorema de la función inversa.

Theorem *(Función inversa) Sea* $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una transformación de clase* $C^{(q)}$*. Si el determinante de la matriz jacobiana de* $\mathbf{F}$ *en un punto* $\mathbf{a} \in D$ *es no nulo,* $|J\mathbf{F}(\mathbf{a})| \neq 0$*, se verifica que:*

a) Existe un entorno $U(\mathbf{a})$ *tal que la transformación restrigida a este entorno*

$$\mathbf{F} : U(\mathbf{a}) \to \mathbf{F}(U(\mathbf{a}))$$

es una biyección.

b) La imagen de $U(\mathbf{a})$ *mediante la transformación,* $\mathbf{F}(U(\mathbf{a}))$*, es un conjunto abierto.*

c) Existe la transformación inversa

$$\mathbf{F}^{-1} : \mathbf{F}(U(\mathbf{a})) \to U(\mathbf{a})$$

y es de clase $C^{(q)}$.

d) Para cada $\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U(\mathbf{a}))$*, se verifica que*

$$(\mathbf{F}^{-1})'(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mathbf{F}'(\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y}))}$$

Remark *Al determinante de la matriz jacobiana* $|J\mathbf{F}(\mathbf{a})|$ *(suponiendo ésta cuadrada, como ocurre en este teorema) se le llama* ***jacobiano****.*

Aplicación a cambios de variables.

El teorema de la función inversa tiene su aplicación más interesante en los cambios de variables, indicándonos cuando es posible realizar dicho cambio. Hemos de resaltar que numerosos problemas matemáticos (resolver una ecuación diferencial o en derivadas parciales, resolver una integral, etc.) resultan mucho más sencillos de resolver al aplicar un cambio de variables; sin embargo, dicho cambio solo será posible cuando se verifiquen las hipótesis del teorema anterior, es decir, cuando exista una biyección entre las variables antiguas y las nuevas, o lo que es equivalente, cuando exista el cambio inverso.

Example *Sea* $z(x,y)$ *una función de dos variables que verifica la ecuación en derivadas parciales*

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Hallar la ecuación transformada si se utiliza el cambio de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x + 2y \\ v = 3x - 2y \end{array} \right. .$$

Example *Idem para la ecuación*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Teorema de la función implícita.

En muchas ocasiones, en lugar de tener funciones de forma "explícita" (es decir, funciones de la forma $y = f(x)$, $z = f(x,y),\ldots$), en las cuales se puede identificar claramente las variables independientes y la variable dependiente de la función, nos encontramos (por ejemplo, como solución a un determinado problema) con una expresión de la forma $\Psi(x,y,z) = 0$, es decir con una expresión "implícita", y entonces podemos plantearnos la cuestión de si sería posible "despejar" alguna de las variables de dicha expresión en función de las restantes (por ejemplo, si se tiene una expresión de la forma $\Psi(x,y,z) = 0$, que es una ecuación con tres variables, ¿será posible despejar una de ellas, por ejemplo z, en función de las otras dos?; es decir, ¿cuando se verificará que $z = z(x,y)$? Cuando esto es posible, se dice que z está **definida de forma implícita** en función de las variables (x,y) por medio de la expresión $\Psi(x,y,z) = 0$.

Nosotros nos tendremos que conformar con resolver parcialmente este problema, es decir, podremos saber, teóricamente, cuando es cierto que una expresión implícita (por ejemplo una expresión de la forma $\Psi(x,y,z) = 0$), define a unas variables en función de otras (en nuestro caso, por ejemplo, a z en función de las otras variables x e y), aunque no vamos a ser capaces de encontrar esta relación (es decir, será imposible encontrar cual es la expresión de z en función de (x,y)). Sin embargo, una vez resuelta, al menos teóricamente, esta cuestión de dependencia, lo que sí podremos hacer es calcular derivadas parciales de z, hallar sus extremos relativos, calcular su fórmula de Taylor, etc.

Theorem *(Función implícita) Sean las m relaciones (con $m < n$) dadas por*

$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n) = 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,m\}$$

donde estas $\varphi_i : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables en el conjunto abierto X. Si $\mathbf{a} \in X$ es un punto que verifica las anteriores expresiones, es decir, si $\varphi_i(\mathbf{a}) = 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, y además el determinante

$$\left| \frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)(\mathbf{a})}{\partial(x_{n-m+1},\ldots,x_n)} \right| \neq 0$$

entonces existe un entorno $U(\mathbf{a})$ del punto $\mathbf{a}$ tal que las variables $x_{n-m+1},\ \ldots,\ x_n$ son funciones de las $n-m$ primeras variables $x_1,\ \ldots,\ x_{n-m}$, dadas en forma implícita mediante las expresiones $\varphi_i(x_1,\ldots,x_n) = 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,m\}$.

Example *(2do parcial, mayo 2016) Probar que la expresión*

$$yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0$$

define a $z = z(x,y)$ en un entorno de $(1,0)$. Calcular, en dicho punto, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Example *(2do parcial, mayo 2014) Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 y en el* *punto* $(a,b) = (1,1)$ *para la función* $z = z(x,y)$, *que viene definida de manera implícita por la expresión*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) = xy - x - y + z^2$$

siendo $z(1,1) = 1$.

Example *(final junio 2013) Probar que el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2y + \sin(xyz) + z^2 = 1 \\ e^{yz} + xz = 1 \end{cases}$$

define a las variables y, z *como funciones implícitas de* x *en las proximidades del punto* $(1,1,0)$. *Calcular las derivadas con respecto a* x *de dichas funciones en ese punto.*

Example *(2do parcial, mayo 2013) Suponiendo que las ecuaciones*

$$\begin{cases} u + 2v - x^2 + y^2 = 0 \\ 2u - v - 2xy = 0 \end{cases}$$

definen a las variables u, v *como funciones implícitas de* x *e* y *en las proximidades de un adecuado punto, calcular* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Funciones homogéneas.

Definition *Una función* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es* ***homogénea de grado*** r *si se verifica que*

$$f(t\mathbf{x}) = t^r \cdot f(\mathbf{x})$$

$\forall t \in \mathbb{R},\ t \geq 0$ *y* $\forall \mathbf{x} \in X$ *tal que* $t\mathbf{x} \in X$, *es decir, si*

$$f(tx_1,\ldots,tx_n) = t^r \cdot f(x_1,\ldots,x_n)$$

Proposition *Se verifican:*

a) El conjunto de todas las funciones homogéneas del mismo grado y definidas sobre un mismo conjunto X es un espacio vectorial.

b) El producto de dos funciones homogéneas f y g definidas sobre el mismo conjunto, y de grados r y s respectivamente, es una función homogénea de grado $r+s$. *Además, si el cociente* $\frac{f}{g}$ *está definido, esta función es homogénea de grado* $r-s$.

c) Si f y g son homogéneas de grados r y s respectivamente, la función compuesta $g \circ f$ *(donde suponemos que la misma existe) es homogénea de grado* $r \cdot s$.

d) Si f es homogénea de grado r y existen sus derivadas parciales de orden p, éstas son funciones homogéneas de grado $r - p$.

Theorem *(Euler) Sea* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable. Entonces son equivalentes:*

a) f es homogénea de grado r.

*b) Se verifica la expresión (**ecuación de Euler**)*

$$x_1 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} = r \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$$

Example *Probar que la función* $f(x,y) = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ *es homogénea y que verifica el teorema de Euler.*

Ejercicios resueltos.

1. (2do parcial, junio 2011) *Analizar si la expresión*

$$x \cdot e^z + y \cdot e^{x-1} + z \cdot e^y = 2$$

define a z como función implícita de x e y en un entorno de $(x,y) = (1,1)$, *siendo* $z(1,1) = 0$. *En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z(x,y)$ *en el punto* $(1,1)$.

Solución: Puesto que la expresión

$$\Psi(x,y,z) = x \cdot e^z + y \cdot e^{x-1} + z \cdot e^y - 2 = 0$$

verifica que

$$\Psi(1,1,0) = \ldots = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}(1,1,0) = \ldots = 1 + e \neq 0$$

es cierto que $z = z(x,y)$ en un entorno del punto dado.

Necesitamos calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $(1,1)$. Para ello, hemos de derivar (respecto de x y respecto de y) la expresión

$$x \cdot e^{z(x,y)} + y \cdot e^{x-1} + z(x,y) \cdot e^y - 2 = 0$$

Por ejemplo, si derivamos parcialmente respecto de x, resulta

$$1 \cdot e^{z(x,y)} + x \cdot e^{z(x,y)} \cdot z_x + y \cdot e^{x-1} + z_x \cdot e^y - 0 = 0$$

de donde particularizando en $(1,1)$, siendo $z(1,1) = 0$, se tiene

$$1 + 1 \cdot z_x(1,1) + 1 + z_x(1,1) \cdot e = 0$$

o lo que es lo mismo

$$z_x(1,1) = \frac{-2}{1+e}$$

Análogamente, si derivamos parcialmente respecto de y, obtendremos

$$z_y(1,1) = \frac{1}{1+e}$$

De esta forma, la ecuación del plano tangente dado, será

$$z - 0 = \frac{-2}{1+e}(x-1) + \frac{1}{1+e}(y-1)$$

2. (2do parcial, mayo 2012) *Sean* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *y* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *funciones definidas por*

$$f(x,y,z) = \left(x^2+y^2,\ x\cdot y\cdot z,\ z^2-x^2\right)$$
$$g(u,v,w) = \left(\cos(u+w),\ e^v\right)$$

Calcular la matriz jacobiana de $g\circ f$ *en el punto* $(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

Solución: La función $g\circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, por lo que su matriz jacobiana será de dimensiones 2×3. Podríamos calcular previamente la expresión de la composición $g\circ f$ (aplicando que $(g\circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z))$) y con posterioridad derivar el resultado. Sin embargo, usando la regla de la cadena para estas transformaciones, calcularemos previamente las matrices jacobianas de f y g, y usaremos que

$$J(g\circ f)(x,y,z) = J(g(f(x,y,z)))\times J(f(x,y,z))$$

De esta forma

$$J(g\circ f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin(u+w) & 0 & -\sin(u+w) \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

y si particularizamos en el punto $(x,y,z) = (0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ (siendo $(u,v,w) = f(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = (\pi,0,\pi)$)

$$J(g\circ f)(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \begin{pmatrix} -\sin(\pi+\pi) & 0 & -\sin(\pi+\pi) \\ 0 & e^0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\pi} & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

de donde

$$J(g\circ f)(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (2do parcial, mayo 2012) *Estudiar si el sistema*

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot y + x\cdot y\cdot z + z = 1 \\ x\cdot y\cdot z = 0 \end{array}\right\}$$

define a y, z *como funciones implícitas de* x *en un entorno del punto* $(1,0,1)$. *Calcular* $y'(1)$, $z'(1)$.

Solución: Si denotamos

$$\Phi_1(x,y,z) = x\cdot y + x\cdot y\cdot z + z - 1 = 0$$
$$\Phi_2(x,y,z) = x\cdot y\cdot z = 0$$

por el teorema de la función implícita, para que efectivamente este sistema defina a y, z como funciones implícitas de x en un entorno del punto $(1,0,1)$ se tiene que verificar que

$$\Phi_1(1,0,1) = \Phi_2(1,0,1) = 0$$

lo que es evidente, y que

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(y,z)}(1,0,1) \neq 0$$

lo cual también se verifica, ya que

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(y,z)}(1,0,1) = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \end{array}\right|_{(1,0,1)} = \left|\begin{array}{cc} x+xz & xy+1 \\ xz & xy \end{array}\right|_{(1,0,1)} = \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| \neq 0$$

Por lo tanto, podemos considerar el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x \cdot y(x) + x \cdot y(x) \cdot z(x) + z(x) = 1 \\ x \cdot y(x) \cdot z(x) = 0 \end{array}\right\}$$

que si derivamos respecto de x, nos dará un sistema de 2 ec. con 2 incógnitas y', z' :

$$\left.\begin{array}{c} y + xy' + yz + xy'z + xyz' + z' = 0 \\ yz + xy'z + xyz' = 0 \end{array}\right\}$$

Antes de despejar y', z' vamos a particularizar el sistema en el punto $(1,0,1)$:

$$\left.\begin{array}{c} 0 + 1y'(1) + 0 + 1y'(1)1 + 0 + z'(1) = 0 \\ 0 + 1y'(1)1 + 0 = 0 \end{array}\right\}$$

por lo que $y'(1) = 0$, $z'(1) = 0$.

4. (2do parcial, mayo 2013) *Resolver:*
 4.a $\left[0.5\, p.\right]$ *Si* $z = 2x^2 - 3y^3$, *con* $x = u + v + w$ *y* $y = u^2v^2w^2$, *calcular* $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, *y* $\frac{\partial z}{\partial w}$.
 4.b $\left[1.5\, p.\right]$ *Suponiendo que las ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{c} u + 2v - x^2 + y^2 = 0 \\ 2u - v - 2xy = 0 \end{array}\right.$$

definen a las variables u, v *como funciones implícitas de* x *e* y *en las proximidades de un adecuado punto, calcular* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ **y** $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Solución:
(4.a) Podemos sustituir directamente en z para obtener una función que depende de u,v,w :

$$z = 2x^2 - 3y^3 = 2(u+v+w)^2 - 3(u^2v^2w^2)^2$$

y por tanto, si derivamos directamente

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2uv^2w^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2vu^2w^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2wu^2v^2$$

También podíamos haber aplicado la regla de la cadena, de manera que al ser $z = z(x,y) = z(x(u,v,w),y(u,v,w))$, se tendrá

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 4x \cdot 1 - 6y^2 \cdot 2uv^2w^2 = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2uv^2w^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 4x \cdot 1 - 6y^2 \cdot 2vu^2w^2 = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2vu^2w^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = 4x \cdot 1 - 6y^2 \cdot 2wu^2v^2 = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2wu^2v^2$$

(4.b) Como se tiene el sistema

$$\begin{cases} u(x,y) + 2v(x,y) - x^2 + y^2 = 0 \\ 2u(x,y) - v(x,y) - 2xy = 0 \end{cases}$$

si derivamos ambas ecuaciones respecto de x :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} - 2x = 0 \\ 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} - 2y = 0 \end{cases}$$

de donde despejando $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x+4y}{5}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4x-2y}{5}$$

De igual forma, si derivamos ambas ecuaciones respecto de y :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} - 2y = 0 \\ 2\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} - 2x = 0 \end{cases}$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4x+2y}{5}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4y-2x}{5}$$

5. (2do parcial, mayo 2014) *Dadas* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *y* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definidas por*

$$f(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}, x^2 - y^2, \pi(xy + y^2)\right)$$

$$g(u,v,w) = (v + \log(u), \sin(v + w))$$

calcular la matriz jacobiana de la composición $g \circ f$ *en el punto* $(1,1)$.

Solución: Este ejercicio puede resolverse calculando primero la composición $g \circ f$ (y derivando después), o bien derivando primero f y g por separado y aplicando posteriormente la regla de la cadena. Lo hacemos de la segunda forma:

Si calculamos por separado cada una de las matrices jacobianas, se tiene

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \\ 2x & -2y \\ \pi y & \pi(x+2y) \end{pmatrix}; \qquad Jg(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 1 & 0 \\ 0 & \cos(v+w) & \cos(v+w) \end{pmatrix}$$

por lo que, por la regla de la cadena

$$J(g \circ f)(x,y) = Jg(f(x,y)) \times Jf(x,y)$$

y si particularizamos en el punto $(x,y) = (1,1)$, tendremos

$$J(g \circ f)(1,1) = Jg(f(1,1)) \times Jf(1,1) = Jg(e^2, 0, 2\pi) \times Jf(1,1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{e^2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2e^2 & 2e^2 \\ 2 & -2 \\ \pi & 3\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ \pi + 2 & 3\pi - 2 \end{pmatrix}$$

6. (2do parcial, mayo 2014) *Obtener el polinomio de Taylor de grado* 2 *y en el punto* $(a,b) = (1,1)$ *para la función* $z = z(x,y)$, *que viene definida de manera implícita por la expresión*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) = xy - x - y + z^2$$

siendo $z(1,1) = 1$.

Solución: El polinomio pedido viene dado por la expresión

$$P(x,y) = z(1,1) + \left(z_x(1,1)(x-1) + z_y(1,1)(y-1)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(z_{xx}(1,1)(x-1)^2 + 2z_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + z_{yy}(1,1)(y-1)^2\right)$$

por lo que hemos de calcular las correspondientes derivadas parciales a partir de la expresión

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}z(x,y)\right) = xy - x - y + z^2(x,y)$$

Derivando respecto de x :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2}z_x = y - 1 + 2zz_x$$

y respecto de y

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2}z_y = x - 1 + 2zz_y$$

de donde

$$z_x = \frac{y-1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z}; \qquad z_y = \frac{x-1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z}$$

por lo que

$$z_x(1,1) = z_y(1,1) = 0$$

Volviendo a derivar, obtenemos

$$z_{xx} = -\frac{(y-1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 z_x - 2z_x\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z\right)^2}; \qquad z_{yy} = -\frac{(x-1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 z_y - 2z_y\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z\right)^2}$$

por lo que

$$z_{xx}(1,1) = z_{yy}(1,1) = 0$$

mientras que

$$z_{xy} = \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z\right) - (y-1)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 z_y - 2z_y\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)\frac{\pi}{2} - 2z\right)^2}$$

siendo entonces

$$z_{xy}(1,1) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 2} = \frac{2}{\pi - 4}$$

De esta forma

$$P(x,y) = 1 + (0(x-1) + 0(y-1)) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(0(x-1)^2 + 2\frac{2}{\pi-4}(x-1)(y-1) + 0(y-1)^2\right) = 1 + \frac{2}{\pi-4}(x-1)(y-1)$$

7. (2do parcial, mayo 2015) *Probar que la expresión*

$$xy - x + 2z + e^{2z} = 2$$

define $z = z(x,y)$ *en un entorno de* $P(1,2,0)$. *Calcular, en dicho punto,* $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *y* $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Solución:

Si denotamos por $\Phi(x,y,z)$ a la ecuación dada,

$$\Phi(x,y,z) = xy - x + 2z + e^{2z} - 2 = 0$$

puesto que se verifica que

$$\Phi(1,2,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(1,2,0) = 2 + 2e^{2z} \;|_{(1,2,0)} \; = 4 \neq 0$$

es cierto que la expresión dada define $z = z(x,y)$ en un entorno de $P(1,2,0)$.

Para obtener las derivadas parciales pedidas, solo tenemos que derivar implícitamente en la expresión

$$xy - x + 2z(x,y) + e^{2z(x,y)} = 2$$

- Si derivamos respecto x :

$$y - 1 + 2z_x + 2z_x e^{2z} = 0 \Rightarrow z_x = \frac{1-y}{2+2e^{2z}} \Rightarrow z_x(1,2) = \frac{1-2}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

- Si derivamos respecto y :

$$x + 2z_y + 2z_y e^{2z} = 0 \Rightarrow z_x = \frac{-x}{2+2e^{2z}} \Rightarrow z_x(1,2) = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

- Si derivamos z_x respecto x :

$$z_{xx} = -\frac{(1-y)4z_x e^{2z}}{(2+2e^{2z})^2} \Rightarrow z_{xx}(1,2) = -\frac{(1-2)4(-1/4)}{(2+2)^2} = -\frac{1}{16}$$

- Si derivamos z_x respecto y :

$$z_{xy} = \frac{-(2+2e^{2z}) - (1-y)4z_y e^{2z}}{(2+2e^{2z})^2} \Rightarrow z_{xy}(1,2) = \frac{-4-(1-2)4(-1/4)}{(2+2)^2} = -\frac{5}{16}$$

- Si derivamos z_y respecto y :

$$z_{yy} = -\frac{-x4z_y e^{2z}}{(2+2e^{2z})^2} \Rightarrow z_{xx}(1,2) = -\frac{-4(-1/4)}{(2+2)^2} = -\frac{1}{16}$$

8. (2do parcial, mayo 2016) *Sea* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$u(x,y,z) = (x+y)^4 + y^2(z+x)^3$$

siendo

$$x = r \cdot s \cdot e^{-t}; \qquad y = r \cdot s \cdot \log(1+t^2); \qquad z = r^2 \cdot s \cdot \cos t$$

Calcular, usando la regla de la cadena, ∇u, *cuando* $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$. *(Nota: si no se usa la regla de la cadena, el ejercicio bien resuelto puntuará la mitad).*

Solución: Tenemos que

$$u(x,y,z) = u(x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t))$$

por lo que aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \left(4(x+y)^3 + 3y^2(z+x)^2\right)se^{-t} +$$
$$+ \left(4(x+y)^3 + 2y(z+x)^3\right)s\log(1+t^2) + \left(3y^2(z+x)^2\right)2rs\cos t$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \left(4(x+y)^3 + 3y^2(z+x)^2\right)re^{-t} +$$
$$+ \left(4(x+y)^3 + 2y(z+x)^3\right)r\log(1+t^2) + \left(3y^2(z+x)^2\right)r^2\cos t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \left(4(x+y)^3 + 3y^2(z+x)^2\right)(-rse^{-t}) +$$
$$+ \left(4(x+y)^3 + 2y(z+x)^3\right)rs\frac{2t}{1+t^2} + \left(3y^2(z+x)^2\right)(-r^2s\sin t)$$

Ahora solo tenemos que evaluar todas estas igualdades en el punto que nos piden, teniendo en cuenta que si $r = 2,\ s = 1,\ t = 0$, entonces $(x,y,z) = (2,0,4)$. De esta forma

$$\frac{\partial u}{\partial r}(2,1,0) = 32 \cdot 1 + 32 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 32$$
$$\frac{\partial u}{\partial s}(2,1,0) = 32 \cdot 2 + 32 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 64$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(2,1,0) = 32 \cdot (-2) + 32 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -64$$

9. (2do parcial, mayo 2016) *Probar que la expresión*

$$yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0$$

define a $z = z(x,y)$ *en un entorno de* $(1,0)$. *Calcular, en dicho punto,* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Solución: Se trata de probar que el punto $(1,0)$ satisface la expresión

$$\Phi(x,y,z) = yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0$$

lo cual ocurre siempre que $z^3 = 1$, es decir, si $z = 1$. Como además se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(1,0,1) = 4yz^3 + 3x^2z^2 - xye^{xyz}\ |_{(1,0,1)} = 3 \neq 0$$

es cierto que $z = z(x,y)$ en un entorno de $(1,0)$.

Si en la expresión

$$y \cdot z(x,y)^4 + x^2z(x,y)^3 - e^{xyz(x,y)} = 0 \qquad (*)$$

derivamos respecto x :

$$4yz^3z_x + 2xz + 3x^2z^2z_x - e^{xyz}(yz + xyz_x) = 0$$

de donde

$$z_x = \frac{e^{xyz}yz - 2xz^3}{4yz^3 + 3x^2z^2 - e^{xyz}xy} \qquad (**)$$

y particularizando en $(1,0,1)$, resulta

$$z_x(1,0) = \frac{-2}{3}$$

Derivando $(*)$ respecto de y :

$$z^4 + y4z^3z_y + 3x^2z^2z_y - e^{xyz}(xz + xyz_y) = 0$$

y si particularizamos en $(1,0,1)$,

$$1 + 3z_y(1,0) - 1 = 0$$

por lo que

$$z_y(1,0) = 0$$

Derivando $(**)$ respecto de y :

$$z_{xy} = \frac{(e^{xyz}(xz + xyz_y)yz + e^{xyz}z + e^{xyz}yz_y - 6xz^2z_y)(4yz^3 + 3x^2z^2 - e^{xyz}xy) - Cont}{(4yz^3 + 3x^2z^2 - e^{xyz}xy)^2}$$

$$\frac{Cont\ldots-(e^{xyz}yz - 2xz^3)(4z^3 + 12yz^2z_y + 6x^2zz_y - e^{xyz}(xz + xyz_y)xy - e^{xyz}x)}{(4yz^3 + 3x^2z^2 - e^{xyz}xy)^2}$$

y particularizando en $(1,0,1)$, resulta

$$z_{xy}(1,0) = \frac{(1)(3) - (-2)(3)}{9} = 1$$

Ejercicios propuestos.

1. Demostrar que la ecuación de la elipse $x^2 + 3y^2 = 12$, en el punto $(3,1)$ define una función $y = y(x)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de $y(x)$ en $x = 3$.

2. La ecuación
$$3y^3x^4 - x^2y = 2$$
¿define una función $y = f(x)$ derivable en $x = 1$? Justificar la respuesta y, en caso afirmativo, calcular la ecuación la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 1$.

3. Sea $z = f(x,y)$ la función definida a partir de la expresión implícita
$$3y^3z^2 + e^{x+z} - 3y = e$$
Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, y determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

4. Comprobar que las ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z^2 = 2 \\ yz + xy + zx = 1 \end{cases}$$
definen a y y z como funciones de x tales que $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$. Calcular el desarrollo de Taylor en 0 de orden dos de ambas funciones.

5. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, demostrar que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v),$$
siendo $u = x + y$ e $v = x - y$.

6. Demostrar que las ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - z^2 = 0 \\ xy + z - y = 0 \end{cases}$$

definen a x e y como funciones implícitas de z en los puntos $x = 0, y = 2$ y $z = 2$. Calcular además una aproximación de dichas funciones mediante el polinomio de Taylor.

7. Comprobar si la ecuación

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1 = 0$$

determina una función $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1)$. En caso afirmativo, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ y la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(0,1,f(0,1))$.

8. Se considera la función $z = f(x,y)$ que, en los alrededores del punto $(1,1,1)$, está definida implícitamente por

$$z^3 + 3x^2 \cdot y - y^3 \cdot z + y^2 - 3x - 1 = 0$$

Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de tal función en el punto $(1,1)$.

9. Comprobar si la ecuación

$$x \cdot z + y \cdot e^{2x-z} = 2$$

define a z como función implícita de x,y en $(x,y,z) = (1,0,2)$. En caso afirmativo, calcular el gradiente de z en $(1,0)$.

10. Probar que la ecuación

$$z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0$$

define una función $z = g(x,y)$ en un entorno del punto $(x,y,z) = (1, 1+\sqrt{e}, 1)$. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $z = g(x,y)$ en el punto $(1, 1+\sqrt{e})$.

11. Sean α y β dos números reales. Probar que la ecuación

$$\operatorname{sen}(\alpha x + \beta y + z) \cdot e^z = 0$$

define una función implícita $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$. Determinar los valores de α y β para los que se verifican

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -3$$

12. Transformar la expresión

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

mediante el cambio de variables dado por

$$x = e^u \quad \text{e} \quad y = e^v$$

13. Probar que la relación

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$$

define, en un entorno de $x = 0$, una función implícita $y = f(x)$, con $f(0) = 1$. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x)$ en $x = 0$.

14. Sea el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} xu + yvu^2 = 2 \\ xu^3 + y^2v^4 = 2 \end{cases}$$

y considérese el punto $P(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$.

a. Probar que en un entorno de P el sistema define, de forma implícita, a u y v como funciones de x e y.

b. Encontrar una expresión formal para el jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

c. Calcular el jacobiano anterior en el punto $(1, 1)$. Indíquese cual es el valor de $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 1)$.