

## TEMA 2.1.3: FÓRMULA DE TAYLOR EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

PROGRAMA DETALLADO:

**Fórmula de Taylor. Ejemplos.**

**Extremos relativos de funciones de varias variables.**

**Extremos condicionados: Método de los multiplicadores de Lagrange.**

Cálculo de extremos absolutos en conjuntos compactos.

**Ejercicios resueltos.**

**Ejercicios propuestos.**

En todo este tema vamos a seguir trabajando con funciones  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y vamos a ver como se puede extender a las mismas la fórmula de Taylor, establecida para funciones con una sola variable. También veremos que, a partir de la misma, se pueden calcular los extremos relativos para estas funciones. Finalizaremos calculando extremos condicionados para funciones de varias variables y, como caso particular, encontrando los valores máximo y mínimo que sabemos (por el teorema de Weierstrass) alcanza una función de varias variables en un conjunto compacto.

Como siempre, en el tema Anexo 2.1.3 se pueden encontrar todos los razonamientos y demostraciones de los resultados que aquí se incluyen.

### Fórmula de Taylor. Ejemplos.

**Theorem (Taylor)** Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $D$  conjunto abierto, una función de clase  $C^{(m+1)}$  en cada punto de  $D$ . Entonces, si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}$  son puntos de  $D$  y el segmento comprendido entre ellos está contenido en  $D$ , existe un punto  $\mathbf{c}$  en el interior de este segmento, tal que se verifica

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{m!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^n \frac{\partial^m f(\mathbf{a})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_m} - a_{i_m}) + \\ & + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}=1}^n \frac{\partial^{m+1} f(\mathbf{c})}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m+1}}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_{m+1}} - a_{i_{m+1}}) \end{aligned}$$

expresión a la que se llama **fórmula de Taylor** de orden  $n$  para la función  $f$  en el punto  $\mathbf{a}$ . Al último sumando, que lleva el punto  $\mathbf{c}$ , se le llama **resto de Lagrange** de orden  $m + 1$ .

Si particularizamos la expresión anterior al punto  $\mathbf{a} = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ , se obtiene la fórmula de McLaurin.

**Remark** Nuevamente observamos que la fórmula de Taylor nos permite poner una función cualquiera de  $n$  variables como suma de un polinomio de grado  $m$  (polinomio de  $n$  variables) y del resto (o término complementario).

**Example** Establecer, para una  $f(x,y)$  de dos variables, los primeros términos para las fórmulas de Taylor y McLaurin.

Fórmula de Taylor de orden  $n$  en el punto  $(a, b)$  :

$$\begin{aligned} f(x,y) = & f(a,b) + \left[ \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) \right] + \\ & + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x^3}(x-a)^3 + 3 \frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x^2 \partial y}(x-a)^2(y-b) + \right. \\ & \left. + 3 \frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x \partial y^2}(x-a)(y-b)^2 + \frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial y^3}(y-b)^3 \right] + \dots \end{aligned}$$

Fórmula de McLaurin de orden  $n$  :

$$\begin{aligned} f(x,y) = & f(0,0) + \left[ \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y \right] + \\ & + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2 \right] + \\ & + \frac{1}{3!} \left[ \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}x^3 + 3 \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y}x^2y + 3 \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2}xy^2 + \frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}y^3 \right] + \dots \end{aligned}$$

**Remark** Por comodidad en la notación, y por la similitud existente entre estos desarrollos y el binomio de Newton, podemos utilizar una abreviatura para representar cada uno de los corchetes anteriores. Así, pondremos

$$\begin{aligned} f(x,y) = & f(a,b) + \left[ (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(1)} f(a,b) + \\ & + \frac{1}{2!} \left[ (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(2)} f(a,b) + \\ & + \frac{1}{3!} \left[ (x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(3)} f(a,b) + \dots \end{aligned}$$

para representar la fórmula de Taylor anterior. Lo mismo podemos hacer para la fórmula de McLaurin.

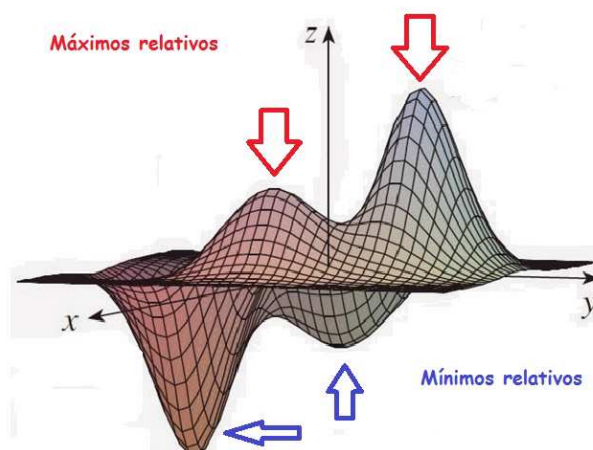
**Example** Hallar el desarrollo de Taylor de grado tres (término complementario en grado 4) para la función  $f(x,y) = x^y$  en un entorno del punto  $(a,b) = (1,1)$ . Usar este desarrollo para calcular de forma aproximada el valor de  $1,1^{1,02}$ .

## Extremos relativos de funciones de varias variables.

En esta sección vamos a tratar de obtener los puntos en los que una función de  $n$  variables diferenciable, alcanza sus valores extremos locales, es decir, los máximos y mínimos relativos.

**Definition** Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un **máximo relativo** (resp. **mínimo relativo**) en un punto  $\mathbf{a} \in D$  si existe un entorno de  $\mathbf{a}$ ,  $U(\mathbf{a})$ , tal que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) \quad (\text{resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}), \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}))$$



**Proposition** (Condición necesaria de extremo relativo) Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $\mathbf{a} \in D$ . Si  $f$  presenta en  $\mathbf{a}$  un extremo relativo (ya sea máximo o mínimo), entonces  $(df(\mathbf{a}))(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in D$ . En este caso, se dice que  $\mathbf{a}$  es un **punto crítico** de  $f$ .

**Remark** Por la relación existente entre la diferencial y las derivadas parciales, la condición necesaria anterior se puede poner como:

Si  $f$  presenta en  $\mathbf{a}$  un extremo relativo (ya sea máximo o mínimo), entonces

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Nuevamente, esta condición solo es necesaria (es decir, si en  $\mathbf{a}$  hay extremo relativo, sus derivadas parciales en dicho punto han de ser nulas), pero no es suficiente (ya que **NO** siempre ocurrirá el recíproco). Sin embargo, sí que este resultado nos ayuda para calcular extremos relativos, puesto que nos da los posibles puntos candidatos a ser extremos: solo tenemos que "buscar" entre los valores que hacen nulas las derivadas parciales de  $f$ , es decir entre las soluciones del sistema de ecuaciones dado por las expresiones

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Al ser esta condición solamente suficiente, precisaremos de otra condición que nos asegure cuando un punto crítico será extremo relativo. Al igual que para las funciones con una sola

variable, esta condición suficiente vendrá dada por el estudio de la segunda derivada, aunque como para funciones de varias variables tenemos varias derivadas segundas, el criterio vendrá dado en términos de hessianos y menores hessianos, introducidos en el tema anterior. Se puede probar que se verifica:

**Proposition** Dada  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  función de clase  $C^{(2)}$  y  $\mathbf{a}$  un punto crítico de  $f$ , formamos la sucesión de números dada por

$$1, \Delta_1 f(\mathbf{a}), \Delta_2 f(\mathbf{a}), \dots, \Delta_n f(\mathbf{a})$$

donde  $\Delta_k f(\mathbf{a})$  representa el menor hessiano de orden  $k$  de  $f$ . Entonces:

- a) Si todos los términos de esta sucesión son positivos, el punto  $\mathbf{a}$  es un mínimo relativo.
- b) Si todos los términos son alternados, el punto  $\mathbf{a}$  es un máximo relativo.
- c) En otro caso, NO podemos afirmar nada sobre lo que ocurre en el punto  $\mathbf{a}$ .

**Example** Determinar los extremos relativos para la función de 3 variables

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

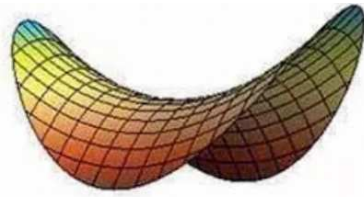
**Remark** Para el caso particular de funciones con dos variables, podemos dar algo más de información que la que aparece en la anterior proposición. Como veremos, para este caso será de especial interés el cálculo del hessiano

$$Hf(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

**Proposition** (Condición suficiente de extremo relativo en funciones con **dos variables**) Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^{(2)}$  y sea  $\mathbf{a} = (a, b) \in D$  un punto crítico de  $f$ . Entonces:

- a) Si  $Hf(a, b) > 0$  y  $f_{xx}(a, b) > 0$ , el punto  $(a, b)$  es un mínimo relativo de  $f$ .
- b) Si  $Hf(a, b) > 0$  y  $f_{xx}(a, b) < 0$ , el punto  $(a, b)$  es un máximo relativo de  $f$ .
- c) Si  $Hf(a, b) < 0$ , el punto  $(a, b)$  no es un extremo relativo de  $f$ . En este caso se dice que es un **punto de silla**.
- d) Si  $Hf(a, b) = 0$ , no podemos afirmar nada sobre el punto  $(a, b)$ . Normalmente se estudia el comportamiento de  $f$  en un entorno de  $(a, b)$ .

**Remark** Un punto crítico se dice que es un **punto de silla** si verifica que respecto de una determinada dirección de la base es un mínimo relativo y con respecto a otra dirección de la base es un máximo relativo.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$



**Example** Estudiar los puntos críticos y clasificarlos para las siguientes funciones:

a)  $f(x,y) = -4x^2 - 5y^2$ . (Sol:  $(0,0)$  máx. rel.)

b)  $f(x,y) = 4x^2 + 5y^2$ . (Sol:  $(0,0)$  mín. rel.)

c)  $f(x,y) = x^2 + xy$ . (Sol:  $(0,0)$  punto silla)

d)  $f(x,y) = x^3 + y^3$ . (Sol:  $(0,0)$  punto silla)

d)  $f(x,y) = x^2y^2$ . (Sol:  $(a,0)$  y  $(0,b)$  mín. rel.)

## Extremos condicionados: Método de los multiplicadores de Lagrange.

Ya sabemos como calcular extremos relativos (locales) para una función de varias variables. Sin embargo, en muchas ocasiones se plantea el problema de obtener los extremos absolutos que alcanza una función en un determinado subconjunto de su dominio; es decir, se trata de localizar puntos para los que se ha de cumplir una determinada condición inicial. Lo vemos con un conocido ejemplo:

**Example** De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 4 ud., hallar el que tiene área máxima.

Este tipo de problemas se llaman **problemas de extremos condicionados**, y para su resolución usaremos el siguiente resultado:

**Theorem** (Métodos de los multiplicadores de Lagrange) Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^{(1)}$ . Si  $\mathbf{a}$  es un extremos de  $f$  condicionado por las "ligaduras"

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = g_2(x_1, \dots, x_n) = \dots = g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

con  $m < n$  y  $g_i$  funciones de clase  $C^{(1)}$ , entonces existen constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  (llamadas **multiplicadores de Lagrange**) tales que  $\mathbf{a}$  es un punto crítico de la función  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

**Remark** El mayor inconveniente que tiene este método es que el mismo no garantiza que el resultado obtenido sea máximo o mínimo, sino que hemos de analizar los puntos críticos de la anterior función  $F$  (conocida como **función lagrangiana**), usando posibles consideraciones geométricas, físicas, económicas, etc. que nos den en

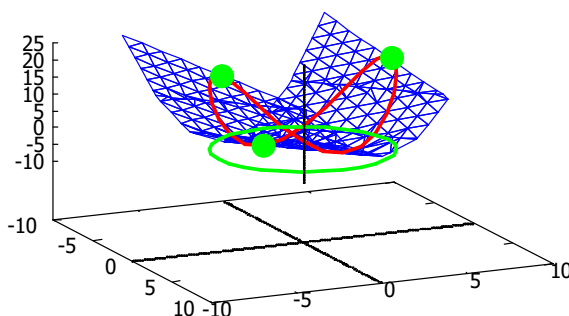
nuestro problema.

**Example** Hallar los puntos extremos que alcanza la función  $f(x,y) = x + y^2$  cuando  $(x,y)$  varía entre los puntos de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 25$ .

*Solución:* Se obtienen como puntos críticos  $P_1(-5,0)$ ,  $P_2(5,0)$ ,  $P_3\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{11}}{2}\right)$  y  $P_4\left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)$ . Como  $f(P_1) = -5$ ,  $f(P_2) = 5$ ,  $f(P_3) = f(P_4) = \frac{101}{4}$ , el mínimo absoluto se alcanzará en  $P_1$ , mientras que máximo absoluto estará en  $P_3$  y  $P_4$ .

**Remark** Podemos realizar (con wxMaxima) la representación del ejemplo anterior, resaltando los puntos extremos:

```
f(x,y):=x+y^2; load(draw);  
draw3d(implicit(x+y^2=z,x,-6,6,y,-6,6,z,0,25),color=red,line_width=3.5,  
parametric(5*cos(t),5*sin(t),5*cos(t)+25*(sin(t))^2,t,0,2*%pi),  
color=green,line_width=3.5,parametric(5*cos(t),5*sin(t),0,t,0,2*%pi),  
xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,point_size=2,point_type=filled_circle,  
points([[[-5,0,f(-5,0)],[0.5,1.5*11^0.5,f(0.5,1.5*11^0.5)],  
[0.5,-1.5*11^0.5,f(0.5,-1.5*11^0.5)]]));
```



### Cálculo de extremos absolutos en conjuntos compactos.

Un caso donde se suele utilizar este método es aquel en el que las condiciones de ligadura vienen dadas por desigualdades (lo que nos suele dar un conjunto compacto). Como veremos en los siguientes ejemplos, la resolución de este problema lleva implícita la resolución de otros dos: un problema de extremos "sin condiciones" y un problema de extremos condicionados.

**Example** Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de la función  $f(x,y) = xy^2$  en el compacto definido por

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

¿Puede garantizarse que dichos puntos existen? ¿Por qué?

*Solución: Dichos valores siempre van a existir puesto que  $f$  es una función continua y el conjunto  $K$  es compacto (Th. Weierstrass). Para calcular dichos valores estudiamos por separado lo que ocurre en el interior y en la frontera de  $K$  (que es el círculo de radio 1 restringido al 1er cuadrante):*

*- Puntos críticos en  $\text{int}(K)$  : Si resolvemos el sistema  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ; obtenemos como solución del mismo el punto  $(0,0)$  y también puntos de la forma  $(x,0)$ . Puesto que ambos puntos no están en el interior de  $K$  (están en la frontera), no tenemos candidatos en este interior a ser máx. o mín.*

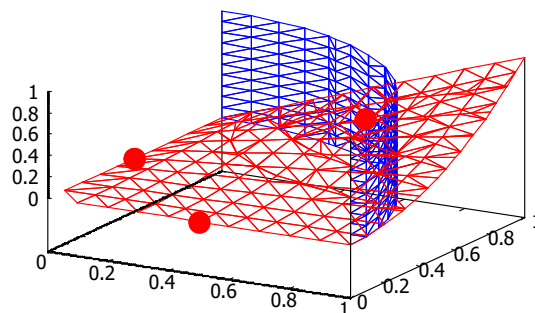
*- La frontera está formada por 3 curvas: el eje  $X$ , el eje  $Y$ , y la porción de circunferencia restringida al 1er cuadrante. Si calculamos los posibles candidatos en cada una de las curvas:*

*\* En el eje  $X$  (recta  $y = 0$ ), la función  $f(x,y) = xy^2 = 0$ , lo que quiere decir que siempre se anula en dichos puntos.*

*\* Igualmente ocurre en el eje  $Y$  (recta  $x = 0$ ), la función  $f(x,y) = xy^2 = 0$ .*

*\* En el primer cuadrante de la curva  $x^2 + y^2 = 1$ , como  $y^2 = 1 - x^2$ , se tiene que  $f(x,y) = xy^2 = x(1 - x^2)$ , que tiene por puntos críticos ( $f'(x) = 0$ ) solamente  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; siendo en este punto  $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Por tanto solo tenemos como posible candidato el punto  $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ .*

*Si evaluamos  $f$  en todos los puntos obtenidos anteriormente, resulta que  $f$  se anula en los ejes de coordenadas, siendo además  $f(A) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ . Por tanto,  $f$  alcanza su máximo en el punto  $A$  (siendo su valor  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ), mientras que alcanza su mínimo en todos los puntos de los ejes de coordenadas, siendo este mínimo el valor 0.*



*Representación realizada con wxMaxima:*

`load(draw);`

`draw3d(color=blue,line_width=1,implicit(x^2+y^2=1,x,0,1,y,0,1,z,0,1),`

`color=red,line_width=1,implicit(x*y^2=z,x,0,1,y,0,1,z,0,1),`

```

xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
point_size=2,point_type=filled_circle,
points([[1/sqrt(3),sqrt(2/3),sqrt(4/27)],[0.5,0,0],[0,0.5,0]]);

```

## Ejercicios resueltos.

1. (2do parcial, junio 2011) Hallar los extremos relativos, si los hubiera, de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

**Solución:** Calcularemos primero sus puntos críticos:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \text{ó} \\ x = 1 \text{ e } y = 1 \end{cases}$$

Así tenemos dos puntos críticos  $A(0,0)$  y  $B(1,1)$ . Para clasificarlos necesitamos del hessiano en cada uno de ellos. Puesto que se verifica

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$$

tendremos que

$$Hf(A) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{y} \quad Hf(B) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} > 0$$

de donde se deduce que  $A$  es un punto de silla y  $B$  es un mínimo relativo.

2. (2do parcial, mayo 2012) Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = x \cdot y^2$$

en el conjunto compacto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq -5/3\}$$

**Solución:**

Calcularemos primero los puntos críticos de  $f$  en el interior de  $D$ : si resolvemos

$$f_x = y^2 = 0; f_y = 2xy = 0$$

obtenemos como soluciones el punto  $A(0,0)$  pero también cualquier punto de la forma  $B(x,0)$  (estos puntos aparecen representados en rojo en la figura siguiente).

Calcularemos ahora los puntos críticos en la frontera de  $D$ : En primer lugar lo haremos en la parte de dicha frontera que corresponde a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ : Como  $f(x,y) = xy^2$ , si sustituimos la ec. de la circunferencia en esta  $f$ , se tendrá

$$f(x) = x(4 - x^2) = 4x - x^3$$

que tiene por puntos críticos (se tiene que  $f'(x) = 4 - 3x^2 = 0$ , con lo que  $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ ):



$$C\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right), D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{8}}{3}\right), E\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right), F\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$$

Además, en la parte de la figura que corresponde a la recta  $x = -5/3$ , se tiene

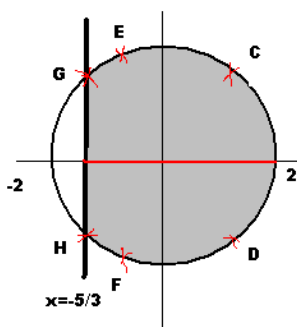
$$f(x,y) = xy^2 = -\frac{5}{3}y^2$$

que tiene como punto crítico  $y = 0$  (siendo  $x = -5/3$ ). Notemos que este punto ya está contemplado en los puntos  $B(x, 0)$ .

Si calculamos los puntos intersección de la circunferencia y la recta, obtenemos

$$G\left(-\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{11}}{3}\right) \text{ y } H\left(-\frac{5}{3}, -\frac{\sqrt{11}}{3}\right)$$

Si evaluamos  $f$  en todos los puntos hallados, resulta que el máximo se encuentra en  $C$  y  $D$  (siendo  $f(C) = f(D) = 3,0792$ ), mientras que el mínimo se encuentra en  $G$  y  $H$  (siendo  $f(G) = f(H) = -6,1111$ ).



3. (2do parcial, mayo 2013) Hallar los extremos absolutos que alcanza la función

$$f(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy$$

en el conjunto compacto

$$K = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

**Solución:** El conjunto  $K$  coincide con el círculo  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ , es decir, el círculo de centro  $(1,0)$  y de radio 1.

Inicialmente calculamos los puntos críticos de  $f(x,y)$  que están en el interior del círculo:  
Resolviendo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación resulta que  $y = 0$  ó  $x = 1$ . Si  $y = 0$ , en la 2ª ec. se obtiene  $x = 0$  ó  $2$ ; si  $x = 1$ , resulta  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Por tanto tenemos los puntos críticos  $A(0,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  y  $D\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . Los puntos que están en el interior de  $K$  son  $C$  y  $D$  ( $A$  y  $B$  están en el borde).

Ahora obtendremos los posibles puntos candidatos en la **frontera del recinto**: No es preciso

aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para evaluar lo que vale  $f$  en la frontera de  $K$ , ya que se verifica que

$$f(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy = y(x^2 + y^2 - 2x)$$

y como la frontera viene dada por los puntos tales que  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , resulta que  $f$  en cualquier punto de la frontera de  $K$  vale siempre 0 (por lo que también valdrá 0 en cualquier punto que podamos haber obtenido mediante multiplicadores de Lagrange, como hemos visto con los puntos  $A(0,0)$  y  $B(2,0)$ ). No obstante, veamos que se obtiene este mismo resultado si aplicamos multiplicadores:

Se trata de hallar los puntos críticos de la función

$$F(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2x)$$

para lo que hemos de resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy - 2y + 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 2x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

La 1ª ec puede ponerse como

$$xy - y + \lambda(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)y + \lambda(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(y + \lambda) = 0$$

por lo que o  $x = 1$  o  $\lambda = -y$ .

Si tomamos  $x = 1$ , de la 3ª ec. resulta que  $y = \pm 1$ , por lo que hemos obtenido los puntos críticos  $E(1,1)$  y  $F(1,-1)$ .

Si tomamos  $\lambda = -y$  e igualamos con el valor de  $\lambda$  que se obtiene al despejar en la segunda ecuación, al simplificar resulta

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

que coincide con la 3ª ec. Por tanto, en este caso serán críticos todos los puntos que cumplan esta última condición, es decir todos los puntos que están en el círculo frontera de  $K$ .

Evaluando  $f$  en todos los puntos obtenidos, resulta ser

$$f(A) = 0; f(B) = 0; f(C) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}; f(D) = \frac{2}{3\sqrt{3}}; f(E) = 0; f(F) = 0$$

por lo que el mínimo absoluto se alcanza en  $C$  y el máximo en  $D$ .

4. (2do parcial, mayo 2014) Hallar los extremos relativos que alcanza la función

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

**Solución:** Obtenemos los puntos críticos a través de la resolución del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

obteniéndose (despejamos en la 2ª ec. y sustituimos en la 1ª)

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

que tiene por soluciones  $x = \pm 2, \pm 1$ . Así, tenemos los puntos críticos  $(2,1)$ ,  $(-2,-1)$ ,  $(1,2)$  y  $(-1,-2)$ .

Vamos a particularizar el hessiano en cada uno de ellos: Puesto que

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix}$$

tendremos

$$Hf(2,1) = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} > 0 \quad Hf(-2,-1) = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} > 0$$

por lo que  $(2,1)$  es mínimo relativo y  $(-2,-1)$  máximo relativo. De igual manera, al ser

$$Hf(1,2) = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} < 0 \quad Hf(-1,-2) = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} < 0$$

los puntos  $(1,2)$  y  $(-1,-2)$  serán puntos de silla.

5. De una función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sabemos que

$$f(0,0,0) = 2; \quad \nabla f(0,0,0) = (1,2,-1); \quad Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

5.a A partir de estos datos, obtener una expresión aproximada para  $f(x,y,z)$  en un entorno del punto  $(0,0,0)$ .

5.b Como aplicación de lo anterior, hallar una aproximación para  $f(0'1,0'1,0'1)$ .

**Solución:**

(5.a) Se trata de aproximar la función  $f(x,y,z)$  por su polinomio de McLaurin. Por los datos que nos dan (gradiente=valor derivadas primeras; Hessiana=valor derivadas segundas), podremos hacerlo hasta grado 2, aplicando

$$\begin{aligned} f(x,y,z) \simeq & f(0,0,0) + [f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z] + \\ & + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0,0,0)x^2 + f_{yy}(0,0,0)y^2 + f_{zz}(0,0,0)z^2 + \\ & + 2f_{xy}(0,0,0)xy + 2f_{xz}(0,0,0)xz + 2f_{yz}(0,0,0)yz] \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} f(x,y,z) \simeq & 2 + [1x + 2y + (-1)z] + \\ & + \frac{1}{2!} [3x^2 + (-1)y^2 + (-2)z^2 + 2 \cdot 1xy + 2 \cdot 2xz + 2 \cdot 4yz] \\ = & 2 + x + 2y - z + \frac{1}{2!} [3x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4xz + 8yz] \end{aligned}$$

(5.b) De forma inmediata

$$\begin{aligned} f(0'1,0'1,0'1) \simeq & 2 + 0'1 + 2 \cdot 0'1 - 0'1 + \frac{1}{2!} [3 \cdot 0'1^2 - 0'1^2 - 2 \cdot 0'1^2 + \\ & + 2 \cdot 0'1 \cdot 0'1 + 4 \cdot 0'1 \cdot 0'1 + 8 \cdot 0'1 \cdot 0'1] \end{aligned}$$

de donde

$$f(0'1,0'1,0'1) \simeq 2'27$$

6. (2do parcial, mayo 2015) Una placa tiene forma de la región  $x^2 + y^2 \leq 1$ . La placa se

calienta de manera que en cada punto  $(x,y)$  la temperatura viene dada por

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$$

Obtener los puntos de la placa donde se alcanza la mayor y menor temperatura, así como calcular dicha temperatura.

**Solución:** Se trata de calcular los valores absolutos que alcanza la función  $T(x,y)$  en el conjunto compacto  $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Por ello:

- Puntos críticos en el interior de  $K$  :

De

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 4y = 0$$

resulta que el único punto crítico es  $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ , que está en el interior de  $K$ .

- Puntos críticos de  $T$  en la frontera de  $K$  :

Se trata de resolver el problema de extremos condicionados dado por

$$F(x,y) = x^2 + 2y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Sus puntos críticos se obtienen de resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

De la 2ª ec. se obtiene  $y = 0$  o  $\lambda = -2$  : Si  $y = 0$ , resulta, por la 3ª ecuación, que  $x = \pm 1$  (y por la 1ª ec. hallaríamos el valor de  $\lambda$ , aunque no lo necesitamos para nada), por lo que tendríamos los puntos  $B(1,0)$  y  $C(-1,0)$ . Si  $\lambda = -2$ , sustituyendo en la 1ª ec,  $x = -\frac{1}{2}$ , de donde, por la 3ª ec.,  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Así se obtienen los puntos  $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  y  $E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

Evaluando  $T$  en todos los puntos obtenidos, al ser

$$T(A) = -\frac{1}{4}; \quad T(B) = 0; \quad T(C) = 1; \quad T(D) = \frac{9}{4}; \quad T(E) = \frac{9}{4}$$

el valor mínimo se alcanza en  $A$  (y es de  $-1/4$ ), mientras que el máximo se alcanza en  $D$  y  $E$  (que es de  $9/4$ ).

7. (2do parcial, mayo 2016) Resolver los siguientes apartados:

7.a Calcular y clasificar los puntos críticos de la función definida por

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16$$

7.b Calcular el máximo y el mínimo absoluto de la función anterior en el compacto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$$

**Solución:**

(7.a) Se trata de resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

De la 2da ecuación se obtiene que  $y = 0$  o que  $y = \frac{2x}{3}$ . Entonces distinguimos:

- Si  $y = 0$  : Sustituyendo en la 1ª ec., resulta  $3x^2 - 1 = 0$ , de donde  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Por tanto, hemos obtenido los puntos críticos  $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$  y  $B\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ .

- Si  $y = \frac{2x}{3}$  : Sustituyendo en la 1ª ec., obtenemos  $23x^2 = 9$ , de donde  $x = \pm \frac{3}{\sqrt{23}}$ . Por tanto, hemos obtenido los puntos críticos  $C\left(\frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}}\right)$  y  $D\left(\frac{-3}{\sqrt{23}}, \frac{-2}{\sqrt{23}}\right)$ .

Para clasificarlos, hemos de particularizar el hessiano en cada uno de ellos. Al ser

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -2y \\ -2y & 6y - 2x \end{vmatrix}$$

tendremos que

$$Hf(A) = -4 < 0; Hf(B) = -4 < 0; Hf(C) = 4 > 0; Hf(D) = 4 > 0$$

por lo que  $A$  y  $B$  son puntos de silla,  $C$  es mínimo relativo (ya que  $f_{xx}(C) > 0$ ) y  $D$  es máximo relativo (ya que  $f_{xx}(D) < 0$ ).

(7.b) Para calcular los extremos absolutos en un compacto, actuamos de la forma siguiente:

- Puntos críticos (o extremos) de  $f(x,y)$  en el interior: Los hemos obtenido en el apartado anterior, y solamente el punto  $C\left(\frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}}\right)$  está en el interior de  $K$ .

- Puntos críticos de  $f(x,y)$  en el eje  $X$  (con  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ ) : Basta con sustituir en la expresión de  $f(x,y)$  la ecuación del eje  $X$  ( $y = 0$ ), por lo que tendremos la función  $f(x) = x^3 - x + 16$ , cuyos puntos críticos se alcanzan en  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Por tanto hemos obtenido de

nuevo los puntos críticos  $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$  y  $B\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0\right)$  anteriores.

- Puntos críticos de  $f(x,y)$  en la circunferencia  $x^2 + y^2 = 2$  (con  $y \geq 0$ ): Hemos de aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, por lo que se trata de obtener los puntos críticos de la función

$$F(x,y,\lambda) = x^3 + y^3 - xy^2 - x + 16 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

es decir, hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - y^2 - 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2xy + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene que  $y = 0$  (de donde  $x = \pm \sqrt{2}$ ; es decir, se tienen los puntos críticos  $E(\sqrt{2}, 0)$  y  $F(-\sqrt{2}, 0)$ , que en este caso coinciden con los vértices de la figura), o que  $3y - 2x + 2\lambda = 0$ . Despejando  $\lambda$  de esta última ecuación y también de la 1ra, e igualando ambos resultados se obtiene  $5x^2 - 3xy - y^2 = 1$ , que junto a  $x^2 + y^2 = 2$  nos da un sistema de 2 ec. con 2 inc., y resolviendo este sistema (inicialmente se obtiene la ec. bicuadrada  $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ , que tiene por soluciones  $x = \pm 1$ ,  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ ). Así, obtenemos los puntos críticos  $G(1, 1)$ ,  $H(-1, 1)$ ,  $I\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$  y  $J\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ .

Evaluaremos  $f$  en todos los puntos obtenidos y en los vértices de la figura: Resulta que el mínimo absoluto se alcanza en el punto  $E(-\sqrt{2}, 0)$ , mientras que el máximo absoluto se alcanza en  $J\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ .

## Ejercicios propuestos.

1. Se considera el conjunto de triángulos isósceles inscritos en la elipse  $x^2 + 3y^2 = 12$ , con vértice fijo en  $(0, -2)$  y base paralela al eje  $OX$ . Hallar los triángulos de área máxima y mínima.

2. Hallar los extremos absolutos de la función  $f(x,y) = x^2 + y^2$  en el recinto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$$

3. Hallar los extremos absolutos de la función  $f(x,y) = x^2 + y^2$  condicionados por

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 + y^2 + 6z^2 &= 1 \\ -y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

4. Dada la función

$$F(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{t^2} dt,$$

se pide: Estudiar su continuidad y diferenciabilidad. Calcular los extremos relativos.

5. Sea  $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ . Obtener los valores extremos de  $f$  en el conjunto

$$K = \{(x,y); x^2 + y^2 < 2\}$$

6. Hallar todos los puntos críticos de

$$f(x,y,z) = 6 - 4x - 3y - z(x^2 + y^2 - 1)$$

Hallar y clasificar todos los puntos críticos de

$$f(x,y) = 6 - 4x - 3y - \frac{2}{5}(x^2 + y^2 - 1)$$

7. Se considera la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = x^2 + x \cdot y - x + y^2$ . Calcular los extremos absolutos de  $f(x,y)$  en el semicírculo  $A = \{x^2 + 2y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

8. Hallar los extremos absolutos, caracterizándolos, para la función  $f(x,y,z) = x + y + z$  sujetos a la condición  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ .

9. Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

en el recinto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$$

10. Determinar y clasificar los extremos de la función

$$f(x,y,z) = z$$

sujetos a la restricción

$$g(x,y,z) = z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0$$

(Indicación: La única solución de la ecuación  $t + e^t = 1$  es  $t = 0$ ).

11. Se considera la función

$$f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt$$

Se pide: (a) Estudiar la diferenciabilidad de  $f$  y caso de que sea diferenciable establecer  $df(x,y)$ . (b) Determinar y clasificar los extremos relativos de  $f$ . (c) Calcular  $f(1,0)$ .

12. Calcular los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 1$$

13. Determinar los extremos de la función

$$f(x,y,z) = x + z$$

en la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

14. Sea

$$g(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1 + t^4} dt$$

- Probar que el punto  $(1,0)$  es crítico.
- Clasificar dicho punto crítico.
- Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de  $g(x,y)$  en el punto  $(1,0)$ .