Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 2.1.2: DERIVACIÓN Y DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

PROGRAMA DETALLADO:

Derivada según un vector. **Derivada direccional**.
Derivadas parciales de una función real con *n* variables:
Definición.
Relación con la continuidad.
Interpretación geométrica.
Derivadas parciales de orden superior.
Matriz Hessiana y determinante Hessiano.
Diferencial de una función en un punto.
Definición y propiedades.
Interpretación geométrica de la diferencial: Plano tangente.
El teorema del valor medio en funciones de *n* variables.
Ejercicios resueltos.
Ejercicios propuestos.

En todo este tema vamos a considerar funciones $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y vamos a ver como se pueden extender a las mismas los conceptos de derivabilidad y diferenciabilidad estudiados para funciones de una variable, y estableceremos similitudes y diferencias (que las habrá) entre las funciones de una y varias variables. Con posterioridad, en el Tema 2.1.4 (*Transformaciones*) estudiaremos estos mismos conceptos pero para funciones vectoriales $\vec{\mathbf{F}} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Derivada según un vector. Derivada direccional.

Definition *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con D conjunto abierto. Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$, se llama **derivada de la función f en el punto** a **según el vector** $\vec{\mathbf{v}}$, y se representa por $D_{\vec{\mathbf{v}}}f(\mathbf{a})$, al valor del límite siguiente*

$$D_{\vec{\mathbf{v}}}f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\mathbf{a} + t\vec{\mathbf{v}}\right) - f(\mathbf{a})}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, \ldots, a_n + tv_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{t}$$

*Para el caso particular en el que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ sea unitario, a $D_{\vec{\mathbf{v}}}f(\mathbf{a})$ se le llama **derivada direccional** de f en el punto* **a** *según el vector $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$.*

Derivadas parciales de una función real con n

variables.

Vamos a particularizar la definición anterior al caso de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, obteniendo en este caso lo que llamaremos *derivadas parciales*:

Definición.

Definition *Sea* $\overrightarrow{\mathbf{e}_i} = \left(0,0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0\right)$ *el í – simo vector de la base canónica de* $\mathbb{R}^n$.

Al valor de $D_{\overrightarrow{\mathbf{e}_i}}f(\mathbf{a})$ *se le llama* ***derivada parcial*** *de f en el punto* **a** *respecto de la variable* x_i, *y suele representarse por* $D_i f(\mathbf{a})$, $f_i(\mathbf{a})$ *o por* $\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i}$.

Por tanto

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\ldots,a_n) - f(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{t}$$

Remark *Si particularizamos esta definición al caso particular de funciones de 2 variables* $f(x,y)$, *tendremos dos derivadas parciales (ya que* $\mathbb{R}^2$ *tiene dos vectores en su base canónica:* $\{(1,0),(0,1)\}$*):*

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b)+t(1,0)) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$$

que llamaremos ***derivada parcial de f respecto de la variable*** x *en el punto* (a,b), *y*

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b)+t(0,1)) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}$$

que será la ***derivada parcial de f respecto de la variable*** y *en el punto* (a,b).

Example **Remark** *Extender esta definición al caso de 3 o más variables es inmediato (notemos que para el caso de 3 variables tendríamos 3 derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial z}$*).*

Example *Dada* $f(x,y) = x^2y$, *establecer* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$, *y observar como* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *consiste en derivar f respecto de la variable x, considerando que y es una constante; de forma análoga,* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *consiste en derivar f respecto de la variable y, considerando que x es constante.*

Example *Varios.*

Example *Establecer las derivadas parciales para la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y observar cuando es preciso utilizar la definición y cuando se pueden calcular *estas derivadas parciales de forma directa.*

Relación con la continuidad.

Una primera diferencia que nos encontramos entre las funciones de una y de varias variables en relación a estos conceptos, es que mientras que en funciones de una variable sabemos que si $f(x)$ es derivable en un punto a, entonces f es continua en a, para funciones de varias variables, inicialmente no existe relación alguna entre que la función sea continua en un punto y que la función sea derivable parcialmente en dicho punto. Lo vemos en el siguiente ejemplo:

Example *Dada la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

probar que la misma admite derivadas parciales en $(0,0)$ *pero que la misma no es continua en dicho punto.*

Interpretación geométrica.

Como la definición de derivada parcial respecto de una variable no es sino calcular derivadas de funciones con una sola variable (ya que consideramos el resto de variables como si fuesen constantes), la interpretación geométrica (para el caso de 2 variables) de este concepto coincidirá básicamente con la interpretación geométrica de la derivada de una función con una variable:

Sea $z = f(x,y)$ una superficie. Si la intersectamos con el plano $y = cte$, obtendremos una curva (situada en el plano $y = cte$). Sea $P(a,b,f(a,b))$ un punto de ésta y sea $M(a,b)$ su proyección sobre el plano OXY.

Considerando y fija, le aplicamos un incremento t a la variable x, de forma que pasamos del punto $M(a,b)$ al punto $N(a+t,b)$; cuya imagen en la curva será un nuevo punto $T(a+t,b,f(a+t,b))$.

Entonces, el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento $\overline{PT}$ y cuyo cateto contiguo es el segmento $\overline{MN}$ (de longitud t) tiene una tangente dada por

$$\tan\alpha = \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$$

Si hacemos que $t \to 0$, es decir, si hacemos que el punto T se acerque cada vez más al punto M, obtendremos diferentes rectas secantes. La posición límite de estas rectas secantes tendría por pendiente

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$$

que no es sino la definición de $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$.

Por tanto, $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ es la pendiente de la recta tangente que se obtiene como límite de las rectas secantes que vamos consiguiento cuando el punto T tiende al punto P (o cuando $t \to 0$).

Análoga interpretación podemos establecer para $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$.

Derivadas parciales de orden superior.

Al igual que ocurre con las funciones de una variable, vamos a ver como podemos derivar (parcialmente) y de forma sucesiva una función de varias variables:

Definition *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, con* D *conjunto abierto. Si existe* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *en todos los puntos de* D*, podremos definir una nueva función, llamada* ***función derivada parcial de*** f ***respecto de*** x_i*, y a la que denotamos por* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$*, y que viene definida por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

Como esta nueva función depende de las mismas n *variables de la función inicial* f*, es posible que la misma sea derivable parcialmente respecto de cualquiera de ellas, por ejemplo, respecto de la variable* x_j*. Entonces, a la derivada de la función* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *respecto de la variable* x_j*, se le llama* ***derivada parcial de orden*** 2 *de la función* f *respecto de las variables* x_i*,* x_j*, y se representa por* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$*,* $f_{x_i x_j}$ *o por* f_{ij}*; es decir*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Análogamente, podríamos definir la derivada parcial de orden k *de* f *respecto de las variables* $x_1, x_2, \ldots, x_k$*, que se representará por*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k}$$

Definition *Cuando una función* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua y admite derivadas parciales continuas hasta el orden* k*, se dice que* f *es de* ***clase*** $C^{(k)}$*.*

Example *Varios.*

Remark *En alguna ocasión es posible que precisemos de calcular derivadas sucesivas utilizando la definición (en lugar de calcularlas de forma directa). Esto ocurre cuando tenemos funciones como la dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y nos piden calcular sus derivadas parciales primeras, segundas, etc. en el punto $(0,0)$*.*

Por ello, incluimos, para funciones de dos variables, las definiciones de derivadas parciales segundas (pudiendo el lector ampliar estas definiciones a derivadas terceras, cuartas, etc, y/o para funciones de 3 o más variables):

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f(a+t,b)}{\partial x} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f(a,b+t)}{\partial x} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f(a+t,b)}{\partial y} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial y} \equiv \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f(a,b+t)}{\partial y} - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}}{t}$$

En los ejemplos resueltos hasta ahora siempre hemos observado que se verifica

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

de aquí que podamos plantearnos si estas derivadas (**cruzadas**) siempre serán iguales.

Esto mismo se puede ampliar a derivadas sucesivas de órdenes mayores y/o de funciones de más variables. En definitiva, ¿son siempre iguales $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$? ¿Son iguales $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ y $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ y cualesquiera otras que podamos obtener derivando una vez respecto de x y dos veces respecto de y?

El siguiente resultado responde a esta cuestión.

Theorem *(Schwarz) Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^{(1)}$ *y supongamos que existe y es continua en un punto* $\mathbf{a} \in D$ *la función* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. *Entonces existe la otra derivada cruzada* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *en el punto* $\mathbf{a}$ *y ésta coincide con la anterior, es decir*

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_j \partial x_i}$$

Suele ser habitual, aunque no seamos conscientes de ello, que siempre se cumplan las hipótesis del teorema anterior, por lo que normalmente siempre aplicamos en la práctica que las derivadas cruzadas son iguales. Pero entonces, ¿podemos poner algún ejemplo donde no se cumpla la igualdad de estas derivadas? Veamos que sí es posible, aunque será en puntos y funciones como la del caso siguiente:

Example *Dada la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

probar que para cualquier punto $(x,y) \neq (0,0)$ *siempre se verifica que* $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ *(observar porqué estas derivadas se calculan de forma directa -sin tener que usar la definición; y siempre se cumplirá esta igualdad ya que se verifican las hipótesis del teorema anterior), mientras que se cumple que*

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = -1; \qquad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 1$$

(estas últimas derivadas no tenemos más remedio que calcularlas usando la correspondiente definición; y el hecho de que ambas no sean iguales se debe a que no se cumple alguna de las hipótesis del teorema anterior; en concreto, se verifica que la función $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *- que tendrá una estructura similar a* $f(x,y)$*- no es continua en* $(0,0)$, *mientras que sí lo es en cualquier punto* $(x,y) \neq (0,0)$*).*

Matriz hessiana y determinante hessiano.

Definition *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^{(2)}$ y sea $\mathbf{a} \in D$. Se llama **matriz hessiana** de f en $\mathbf{a}$, a la matriz $n \times n$ formada por las derivadas parciales segundas de f en $\mathbf{a}$, es decir*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

*Se denomina **hessiano** al determinante de la matriz hessiana, y solemos representarlo por $Hf(\mathbf{a})$:*

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Notemos que como las derivadas cruzadas suelen ser iguales, tanto la matriz hessiana como el hessiano son simétricos.

Definition *Se llama **menor hessiano** de orden k de f en $\mathbf{a}$, $\triangle_k f(\mathbf{a})$, al determinante de la matriz cuadrada formada por la intersección de las k primeras filas y columnas de la matriz hessiana.*

*Y se llama **sucesión de menores hessianos**, a las sucesión dada por*

$$\triangle_1 f(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2};\ \triangle_2 f(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2^2} \end{vmatrix};\ \ldots$$

$$\ldots;\ \triangle_k f(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_2 \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_k^2} \end{vmatrix}$$

Diferencial de una función en un punto.

Definición y propiedades.

Para el caso de funciones de una variable, indistintamente hablamos de función derivable o de función diferenciable en un punto, a pesar de ser dos conceptos distintos (como puede verse en el Anexo 2.1.2). Además, sabemos que se verifica que

$$df(x) = f'(x)dx$$

Vamos a generalizar este concepto a funciones de varias variables. Por comodidad, lo haremos para funciones de 2 variables, ya que su extensión al caso de más variables es inmediata.

Definition *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, que admite derivadas parciales primeras y sea $(a,b) \in D$. Se dice que f es* ***diferenciable*** *en (a,b) si se verifica que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

ó lo que es equivalente, si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}h - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Con esta definición, se verifican:

Proposition *(Operaciones con funciones diferenciables). Si f y g son funciones diferenciables en* **a** *$\in D$, se verifican:*

a) $f \pm g$ es diferenciable en **a***, y se verifica*

$$d(f \pm g)(\mathbf{a}) = d(f)(\mathbf{a}) \pm d(g)(\mathbf{a})$$

b) El producto $f \cdot g$ es diferenciable en **a***, y se verifica*

$$d(f \cdot g)(\mathbf{a}) = d(f)(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot d(g)(\mathbf{a})$$

c) Si $g(\mathbf{a}) \neq 0$, entonces el cociente $\frac{f}{g}$ es diferenciable en **a***, y se verifica*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{a}) = \frac{d(f)(\mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot d(g)(\mathbf{a})}{(g(\mathbf{a}))^2}$$

Remark *En la siguiente proposición establecemos la relación existente entre los conceptos de diferenciabilidad, derivabilidad (parcial) y continuidad en funciones de varias variables. Recordamos que ya hemos visto que no hay relación entre derivabilidad (parcial) y continuidad en funciones de varias variables.*

Para el caso de funciones de una sola variable, sabemos que esta relación viene dada por

Para $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (una variable)

$$\begin{array}{ccc} \text{Diferenciable en } a & \Longleftrightarrow & \text{Derivable en } a \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{Continua en } a & & \text{Continua en } a \end{array}$$

Proposition *Se verifican:*

a) Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$*, entonces f es continua en* $\mathbf{a}$*. El recíproco no es cierto.*

b) Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$*, entonces f es derivable en* $\mathbf{a}$ *según cualquier dirección* $\vec{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^n$*. Además se verifica que*

$$(d(f)(\mathbf{a}))\left(\vec{\mathbf{h}}\right) = D_{\vec{\mathbf{h}}}f(\mathbf{a})$$

En particular, se tiene

$$d(f)(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n}dx_n$$

relación que suele escribirse como

$$d(f)(\mathbf{a}) = \overrightarrow{\nabla f(\mathbf{a})} \bullet \overrightarrow{d\mathbf{x}}$$

donde $\bullet$ *indica el producto escalar de los vectores*

$$\overrightarrow{\nabla f(\mathbf{a})} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_n}\right) \text{ y } \overrightarrow{d\mathbf{x}} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$$

Al vector $\overrightarrow{\nabla f(\mathbf{a})}$ *se le conoce como* ***gradiente*** *de f en el punto* $\mathbf{a}$*.*

El recíproco del apartado (b) anterior no es cierto: si *f* admite derivadas parciales en un punto, *f* no tiene porqué ser diferenciable en dicho punto (se pueden poner ejemplos).

Siin ambargo, este recíproco sí que es cierto si se verifica que estas derivadas parciales son de clase $C^{(1)}$ en el punto, es decir si la función es continua, tiene derivadas parciales y éstas son funciones continuas:

Proposition *Si una función f es de clase* $C^{(1)}$ *en el punto* $\mathbf{a}$*, entonces f es diferenciable en* $\mathbf{a}$*.*

Remark *Por tanto, para funciones de varias variables se tiene*

$$\text{Para } f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} \textit{Diferenciable en } \mathbf{a} & \Rightarrow & \textit{Derivable (parcialmente) en } \mathbf{a} \\ \Downarrow & & \\ \textit{Continua en } \mathbf{a} & & \end{array}$$

y si además la función es de clase $C^{(1)}$ *en el punto* $\mathbf{a}$*,*

$$\begin{array}{ccc} \textit{Diferenciable en } \mathbf{a} & \Leftrightarrow & \textit{Derivable (parcialmente) en } \mathbf{a} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \textit{Continua en } \mathbf{a} & & \textit{Continua en } \mathbf{a} \end{array}$$

Interpretación geométrica de la diferencial: Plano tangente.

El que una función de dos variables sea diferenciable en (a,b), significa que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) - \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Entonces, si denotamos por $\alpha(x,y,a,b)$ a este cociente, tendremos que si *f* es diferenciable en

(a,b) se puede escribir

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) + \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,\alpha(x,y,a,b)$$

siendo $\alpha(x,y,a,b)$ una función tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \alpha(x,y,a,b) = 0.$

Esto equivale a decir que, en un entorno del punto (a,b) se tiene verifica

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$$

es decir, que en un entorno de (a,b) la función f se puede aproximar por el plano

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$$

Definition *Al plano dado por la anterior ecuación, se le llama* ***plano tangente a la superficie*** $z = f(x,y)$ *en el punto* (a,b)*, y puede probarse que es la mejor función que aproxima a f en un entorno de* (a,b).

El teorema del valor medio en funciones de n variables.

Recordemos que el teorema de Lagrange para funciones con una sola variable, afirma que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en todo $[a,b]$ y derivable en su interior (a,b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Veamos como puede generalizarse el mismo para funciones de n variables.

Remark *No es que este teorema lo vayamos a utilizar mucho en la práctica. Sin embargo, si que va a ser clave para establecer la fórmula de Taylor en funciones de varias variables. Además también nos da una visión de lo que ocurre cuando en lugar de tener una única derivada (como pasa en una variable), tenemos varias derivadas parciales.*

Antes de pasar a ver esta generalización, necesitamos precisar que sentido tendrá ahora la expresión "... *existe al menos un punto* $c \in (a,b)$ *tal que*...", puesto que ahora al ser $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ puntos de $\mathbb{R}^n$ (vectores de n componentes), pueden admitirse varias interpretaciones. Por ello, establecemos:

Definition *Se llama* ***segmento de extremos*** $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$, *ambos puntos de* $\mathbb{R}^n$*, al conjunto de puntos de la forma*

$$\{\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \mid 0 \le t \le 1\}$$

y lo representaremos por $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Theorem *(Valor medio en varias variables) Sea f una función de n variables, continua en el segmento de* $\mathbb{R}^n$ *de extremos* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$, $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, *y diferenciable en todos los puntos de su interior* $(\mathbf{a},\mathbf{b})$. *Entonces existe al menos un punto* $\mathbf{c} \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$ *tal que*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = (df(\mathbf{c}))(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

ó equivalentemente, existe un punto $\theta \in (0,1)$ *tal que*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = (df(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})))(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Remark *Teniendo en cuenta la relación existente entre la diferencial y las derivadas parciales, bajo las condiciones anteriores, la igualdad del teorema anterior puede expresarse en la forma:*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \overrightarrow{\nabla f(\mathbf{c})} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

es decir

$$f(b_1,\ldots,b_n) - f(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial f(c_1,\ldots,c_n)}{\partial x_1}(b_1 - a_1) + \ldots + \frac{\partial f(c_1,\ldots,c_n)}{\partial x_n}(b_n - a_n)$$

siendo $(c_1,\ldots,c_n)$ *un punto interior al segmento de extremos* $(a_1,\ldots,a_n)$ *y* $(b_1,\ldots,b_n)$.

Ejercicios resueltos.

Ejercicios propuestos.

1. Dada la función

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

con $f(0,0) = 0$, deteminar si dicha función es continua y diferenciable.

2. Dada la función

$$f(x,y) = \frac{4x^3}{x^2 + y^2}$$

con $f(0,0) = 0$, deteminar si dicha función es continua y diferenciable.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\operatorname{sen}(x \cdot y) & \text{si } x \neq 0 \\ g(y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es posible determinar $g(y)$ para que la función $f(x,y)$ sea continua en todos los puntos tales que $x = 0$? Establecer $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

4. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + |y|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar para qué valores de α la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$. Estudiar para qué valores de α existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Estudiar para qué valores de α la función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

5. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

estudiar su continuidad y diferenciabilidad en $(0,0)$.

6. Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide:

a. Estudiar su continuidad y diferenciabilidad en $(0,0)$.

b. Calcular $D_v f(0,0)$ siendo $v = (1,2)$.