Asignatura: **Matemáticas I**

Profesor: **Roque Molina Legaz**

# TEMA 1.2.4: APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

PROGRAMA DETALLADO:

- **Áreas de recintos planos**.
- **Volúmenes de revolución**.
- **Volumen de un sólido por secciones planas**.
- **Longitud de un arco de curva plana**.
- **Área de una superficie de revolución**.
- **Ejercicios resueltos**.
- **Ejercicios propuestos**.

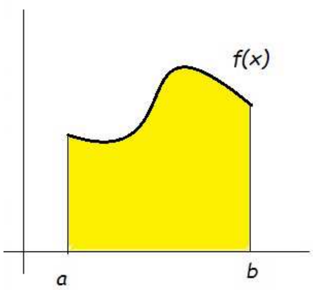
En este último tema dedicado al cálculo integral en funciones de una variable, vamos a ver algunas de las aplicaciones que se obtienen del concepto de integral definida. En lo que veremos a continuación, pueden aparecer integrales "propias" o impropias, aunque en ambos casos las fórmulas a utilizar son las mismas.

También será habitual usar las posibles simetrías que tengan las figuras a las que les queremos obtener estas aplicaciones.

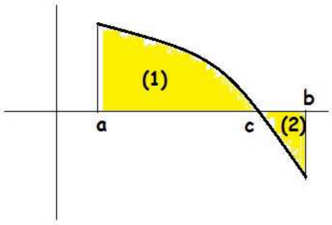
## Áreas de recintos planos.

- Cuando $y = f(x)$ es una curva positiva, el área comprendida entre la misma, el eje $0X$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ sabemos que viene dada por el valor de

$$Área = \int_a^b f(x)dx$$




- Si la curva $y = f(x)$ tiene regiones positivas y negativas, habremos de calcular el área de cada región por separado (previamente obtendremos los puntos de corte de la función con el eje $0X$, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$), y el área total será la suma de los valores absolutos de las áreas de cada región.



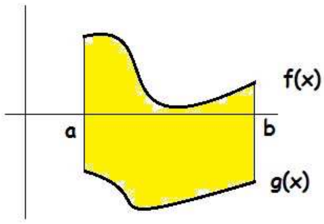

Es decir, en el cáso de esta gráfica, calcularemos por un lado el área de la región (1), por otro lado el área de (2), y sumamos los valores absolutos de ambas.

**Example** *Calcular el área comprendida entre la función* $f(x) = \sin(x)$ *y el eje OX en el intervalo* $[0, 2\pi]$.

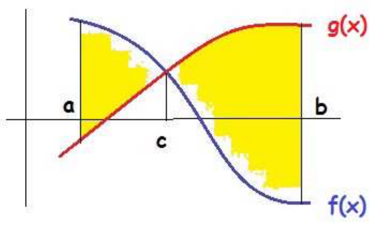
**Remark** *Notemos que hemos de tomar valores absolutos especialmente en las regiones en los que la función es negativa, ya que por la propia definición de integral, se verifica que si* $f(x) \leq 0$*, ocurre que* $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

- Si lo que se trata es de calcular el área comprendida entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, suponiendo que $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ (estamos supondremos que ambas curvas no se cruzan en $[a, b]$), hemos de aplicar

$$\acute{A}rea = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$




Si las curvas se cortasen en $[a, b]$, habremos de calcular los puntos de corte de ambas, y calcular las áreas de cada región por separado. El área total será la suma de los valores absolutos de cada región.



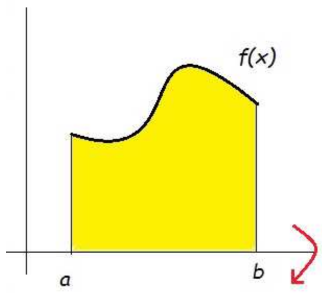
**Example** *Calcular el área del círculo unidad.*

**Remark** *Como veremos en la mayoría de ejemplos, cuando vayamos a realizar ejercicios de cálculo de áreas de recintos planos, suele ser habitual realizar una simplificación del problema y calcular una parte del área pedida y utilizar la simetría de la figura (si la tiene). Lo mismo ocurrirá con el resto de aplicaciones.*

# Volúmenes de revolución.

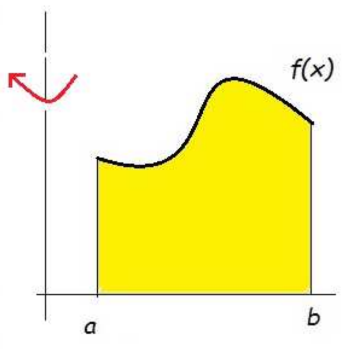
Volumen obtenido al girar un área plana alrededor del eje $0X$.

$$V_{0X} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$




Volumen obtenido al girar un área plana alrededor del eje $0Y$.

$$V_{0X} = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx = 2\pi \int_a^b x \cdot y dx$$




**Example** *Calcular el volumen de una esfera de radio R, haciendo girar la circunferencia de radio R alrededor del eje OX y alrededor del eje OY.*

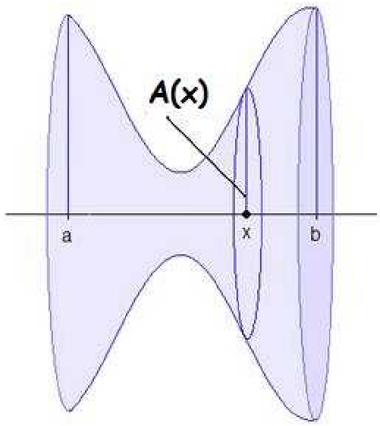
**Example** *Calcular el volumen del "toro" obtenido al hacer girar la circunferencia* $(x-6)^2 + y^2 = 4$ *alrededor del eje OX.*

## Volumen de un sólido por secciones planas.

Consideremos un cuerpo sólido y sea $A(x)$ la sección producida al cortar dicho cuerpo por un plano arbitrario perperdicular a uno de los ejes de coordenadas. Si esta $A(x)$ es conocida y es una función continua de coordenada $x$, entonces el volumen del sólido viene determinado por

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

siendo $[a, b]$ el intervalo donde varía la variable por la que hemos intersectado el sólido.



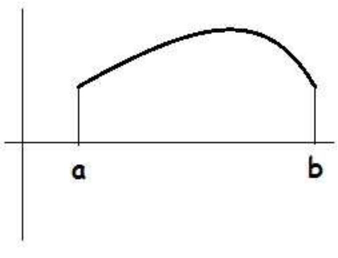

**Remark** *Lo que hacemos al calcular la integral del área de la sección transversal $A(x)$, donde x varia entre a y b, no es sino calcular la suma de las infinitas áreas (rodajas de grosor despreciable) obtenidas al intersectar nuestro volumen por infinitos planos de la forma $x = cte$.*

**Example** *Calcular, utilizando el método de secciones planas, el área de una esfera de radio R.*

## Longitud de un arco de curva plana.

Sea $y = f(x)$ una curva plana definida en el intervalo $[a, b]$, en el que $f(x)$ es una función de **clase** $C^{(1)}$ (es decir, una función que es continua y con función derivada primera continua). En tal caso, la longitud del arco de curva entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$



**Example** *Calcular la longitud de una circunferencia de radio R.*

**Example** *Calcular la longitud de un arco de catenaria (coseno hiperbólico), entre los puntos* $x = -1$ *y* $x = 1$.

# Área de una superficie de revolución.

Hemos visto que dada una función continua $f(x)$ definida en el intervalo $[a,b]$, pueden obtenerse figuras de revolución al girar el área que forma la curva alrededor de alguno de los ejes de coordenadas. De estos cuerpos de revolución hemos visto como obtener su volumen (giro en torno eje $0X$ y/o giro en torno eje $0Y$). Pues de estos cuerpos, también es posible obtener su área superficial. En concreto, se verifica (siempre que la función $f(x)$ sea de clase $C^{(1)}$) que el área de revolución (o área lateral de la superficie) cuando gira en torno al eje $0X$ viene dada por

$$AS_{0X} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y^2}\,dx$$

mientras que si gira en torno al eje $0Y$ la misma viene dada por

$$AS_{0Y} = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + y^2}\,dx$$

**Example** *Calcular el área superficial de una esfera de radio R haciendo girar una circunferencia de radio R alrededor del eje OX.*

# Ejercicios resueltos.

1. *(2do parcial, junio 2011)* Calcular el área y la longitud del lazo de la región del plano encerrada por la curva

$$3y^2 = x(x-1)^2$$

**Solución**: Se trata de una curva simétrica respecto del eje $X$ y que corta al mismo en las abcisas 0 y 1. Por tanto

$$Área = \int_0^1 y dx = \left| 2\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{3}}\,(x-1)dx \right| = \ldots = \frac{8}{45}\sqrt{3}$$

donde esta integral es inmediata.

De igual forma

$$Longitud = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3x-1}{2\sqrt{3x}}\right)^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{3x+1}{2\sqrt{3x}}dx = \ldots = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

integral que también es inmediata (si se descompone la fracción en dos).

2. *(2do parcial, junio 2013)* Sea $f(x)$ la función definida por

$$f(x) = \frac{4x}{x^4 + 1}$$

2.a Calcular la integral

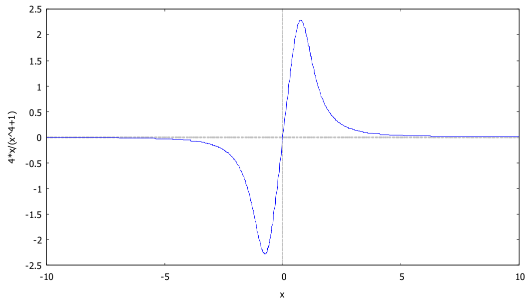
$$\int f(x)dx$$

Hallar, razonadamente, el área comprendida entre la curva $f(x)$ y el eje $X$.

**Solución**: Calcular la integral es inmediato si observamos que

$$\int f(x)dx = \int \frac{4x}{x^4+1}dx = 2\int \frac{2x}{(x^2)^2+1}dx = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan(t) + cte =$$
$$= 2\arctan(x^2) + cte$$

Además, como la representación gráfica de la curva viene dada por



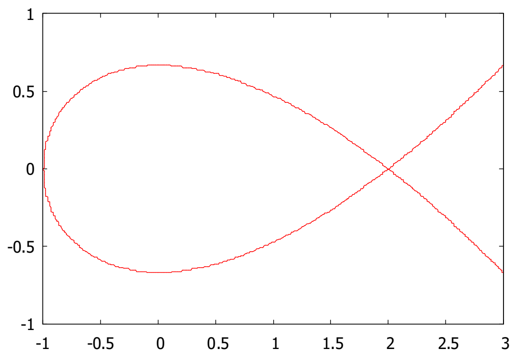

(notemos que se trata de una curva impar, y que tiene al eje $X$ como asíntota horizontal), el área pedida será

$$Area = 2\int_0^{+\infty} \frac{4x}{x^4+1}dx = \left[4\arctan(x^2)\right]_0^{+\infty} = 4\arctan(+\infty) - 4\arctan(0) =$$
$$= 4\frac{\pi}{2} - 0 = 2\pi$$

3. *(2do parcial, mayo 2014)* Calcular la longitud del bucle de la curva dada por

$$9y^2 = (x-2)^2(1+x)$$

**Solución**: La representación gráfica de la curva viene dada por




por lo que calcularemos la longitud de una de las dos ramas (entre $-1$ y $2$) y multiplicaremos por 2.

Sabemos que la longitud de una curva viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

lo que en nuestro caso sería

$$L = 2\int_{-1}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Como

$$y = \pm\frac{x-2}{3}\sqrt{1+x}$$

si tomamos el signo +, tendremos

$$y' = \ldots = \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

por lo que

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\right)^2} = \ldots = \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}}$$

Así, se trata de resolver

$$L = 2\int_{-1}^{2}\frac{x+2}{2\sqrt{1+x}}dx = \int_{-1}^{2}\frac{x+2}{\sqrt{1+x}}dx = \ldots = 4\sqrt{3}$$

(Esta integral la hemos resuelto mediante el cambio de variable $t^2 = 1+x$; obteniéndose una integral inmediata en variable $t$).

4. *(2do parcial, mayo 2016)* Resolver los siguientes apartados:
   - 4.a Calcular el área de la superficie de revolución (área lateral) obtenida al girar la curva $y = x^3$, con $-1 \leq x \leq 1$, alrededor del eje $OX$.
   - 4.b Justificar que se verifica
   $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$
   y calcular el valor de una de ellas.

**Solución**:

(1.a) Como la curva es impar, calcularemos el área superficial obtenida al integrar en $[0,1]$ y multiplicamos el resultado por 2. Así

$$A_{OX} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\cdot 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx = 4\pi\left(\frac{5}{27}\sqrt{2}\sqrt{5} - \frac{1}{54}\right)$$

(la integral es inmediata al ir multiplicando la derivada del radicando).

(1.b) Si resolvemos la integral primera por partes (tomando $u = e^{-x}$, $dv = \cos x dx$; de donde $du = -e^{-x}dx$, $v = \sin x$), se tendrá que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = [e^{-x}\sin x]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

y si nos fijamos en el valor que se obtiene del sumando ya integrado

$$[e^{-x}\sin x]_0^{+\infty} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x - e^{-0}\sin 0 = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{e^x} - 0 = 0 - 0 = 0$$

(donde este límite se ha calculado teniendo en cuenta que el numerador está acotado y el denominador tiende a $\infty$), por lo que es cierto que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

Para calcular el valor de la integral, volvemos a aplicar partes a la segunda (con $u = e^{-x}$, $dv = \sin x dx$; de donde $du = -e^{-x}dx$, $v = -\cos x$), de donde

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = [-e^{-x}\cos x]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$$

es decir

$$2\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = [-e^{-x}\cos x]_0^{+\infty}$$

por lo que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}[-e^{-x}\cos x]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}(-e^{-x}\cos x) + e^{-0}\cos 0\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

(el límite que aparece en esta igualdad se calcula de la misma forma que el anterior).

5. *(1er parcial, febrero 2017)* Calcular el valor de las siguientes integrales:

$$a)\ \int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx \qquad b)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$$

**Solución**:

(5.a) Completando cuadrados, resulta

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

por lo que efectuaremos el cambio de variable $x-1 = 2\sin t$ :

De esta forma

$$\int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\ 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2t + \sin 2t + cte$$

es decir

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx = 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) + cte$$

(5.b) Realizaremos el cambio de variable $x = t^2$, de manera que (observar que se obtienen los mismos límites de integración para la variable $t$ que para $x$, ya que si $x = 1$, entonces $t = 1$; idem para $x = +\infty$)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2}}{(1+t^2)^2}2tdt = \int_1^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt$$

Esta última integral la resolvemos por el método de Hermite (ya que el denominador tiene raíces complejas múltiples):

Aplicando la descomposición de este método, tendremos

$$\frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{Ct+D}{1+t^2}\right)$$

es decir

$$\frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C(1+t^2)-(Ct+D)2t}{(1+t^2)^2}$$

y operando y calculando los coeficientes, resulta $A = 0,\ B = 1,\ C = -1$ y $D = 0$, por lo que

$$\frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{0t+1}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{-1t+0}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{-t}{1+t^2}\right)$$

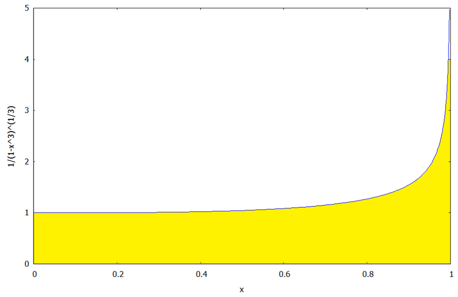
Por todo lo anterior

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\frac{-t}{1+t^2}\right)dt = \left[\arctan t + \frac{-t}{1+t^2}\right]_1^{+\infty} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right) - \left(\arctan 1 - \frac{1}{1+1^2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

6. *(1er parcial, febrero 2017)* Se considera la región acotada por la gráfica de
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$$
y el eje $OX$ en el intervalo $[0,1]$. Hallar, justificadamente, el área de dicha región y el volumen del sólido de revolución que se forma al girar dicha región alrededor del eje $OX$.

Solución: El área considerada aparece en amarillo en la siguiente gráfica, donde la recta $x = 1$ es una asíntota vertical. Se trata, por tanto, de una integral impropia.




De esta forma,
$$\text{Área} = \int_0^{1^-} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \int_0^{1^-} (1-x)^{-1/3}dx = \left[-\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\right]_0^{1^-} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{3}{2}(1-x)^{2/3}\right) - \left(-\frac{3}{2}(1-0)^{2/3}\right) = \frac{3}{2}$$
y
$$Vol(OX) = \pi\int_a^b (f(x))^2dx = \pi\int_0^{1^-} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2} = \pi\int_0^{1^-}(1-x)^{-2/3}dx =$$
$$= \pi\left[-3(1-x)^{1/3}\right]_0^{1^-} = \pi\left(\lim_{x\to 1^-}\left(-3(1-x)^{1/3}\right) + 3\right) = 3\pi$$

# Ejercicios propuestos.

1. Expresar el siguiente límite como una adecuada integral definida, y calcularla:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{n}{(n+n)^2}\right)$$

2. Calcular
$$\int \frac{dx}{3\cos x - 4\,\mathrm{sen}\, x}$$

3. Calcular

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 5}$$

4. Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

4.a Hallar el área determinada por las rectas $x = 0,\ x = t,$ el eje $0X$ y $f(x)$.

4.b Calcular el volumen obtenido al girar la región anterior alrededor de $y = 0$.

4.c ¿Cuales son los valores correspondientes del área y del volumen anteriores si hacemos $t \to +\infty$.

5. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)dt}{x^6}$$

6. Calcular las siguientes integrales

$$a) \quad \int \frac{(x+1)^2}{x^3 + x}dx$$

$$b) \quad \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 x\, dx$$

7. Calcular el área de la región plana comprendida entre el eje $x$, la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{-x}{1 + x^4}$$

y limitada lateralmente por las rectas $x = \pm 1$.

8. Hallar el área encerrada por las curvas $y = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$ e $y = e^{1-|x|}$, sabiendo que se cortan en $x = \pm 1$.

9. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen}(t^2)dt}{x^2}$$

10. Calcular

$$\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2 - 4x}}dx$$

11. Calcular

$$\int \frac{x \cdot lnx}{\sqrt{1 + x^2}}dx$$

12. Se considera la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

12.a Calcular las primitivas de la función $f(x)$.

12.b Hallar la longitud de la curva $y = F(x)$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$.

12.c Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$$

13. Calcular

$$\int \frac{dx}{1 + 2 \cdot \operatorname{tg} x}$$

14. Sea $R$ la región plana delimitada por las gráficas de $y = 0, y = \sqrt{5}, x = 0, x = y^2$. Determinar el volumen del sólido generado al girar la región $R$ alrededor del eje $Y$, mediante los dos siguientes métodos:

14.a Por secciones planas.

14.b Como un sólido de revolución.

15. Calcular el siguiente límite (expresándolo como una adecuada integral de Riemann):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \ldots + \sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}$$

16. Sea $R$ la región plana delimitada por la gráfica de la función $f(x) = (\log x)^2$, el eje $X$ y las rectas verticales $x = 1,\ x = e$. Se pide:

16.a Calcular el área de $R$.

16.b Calcular el volumen del sólido obtenido al girar $R$ alrededor del eje $Y$.

17. Calcular la integral

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{1 + \sqrt{(x-1)^3}} dx$$

18. Calcular, en el primer cuadrante, el área comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

19. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$$

20. Calcular el área de los dos recintos en que la región limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

queda dividida mediante la circunferencia de centro $(0, -3)$ y radio 5.

21. Calcular la integral

$$\int \frac{2x - 1}{\sqrt{4 - 9x^2}} dx$$

22. Usando la definición de integral definida, calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3 + 1} + \frac{2^2}{n^3 + 2^3} + \frac{3^2}{n^3 + 3^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3 + n^3}\right)$$