Asignatura: **Matemáticas I**

Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 1.2.3: INTEGRALES IMPROPIAS

PROGRAMA DETALLADO:

- **Integrales impropias de primera especie**.
- **Integrales impropias de segunda especie**.
- **Criterios de convergencia**.
- **Ejercicios resueltos**.
- **Ejercicios propuestos**.

Al definir la integral de Riemann (o integral definida) siempre se han considerado funciones acotadas definidas en intervalos compactos. Por tanto, si la función de partida no está acotada (por ejemplo, por tener una asíntota vertical), o bien si el intervalo no está cerrado y/o acotado (por ejemplo, por ser funciones definidas en $[a,+\infty)$) , carecerán de sentido los razonamientos y desarrollos realizados en el tema anterior.

Por ello, en este tema abordamos la ampliación del concepto de integral, atendiendo a los dos aspectos siguientes:

- Que el intervalo de integración no sea acotado: Obtendremos lo que se conoce como *integrales impropias de 1ª especie*.

- Que el intervalo sea acotado, pero que la función no lo está: Aparecerán lo que se conoce como *integrales impropias de 2ª especie*.

En ambos casos nos limitaremos a estudiar como se pueden calcular las mismas, sin establecer Criterios de Convergencia para estas integrales, y que pueden encontrarse en el Anexo 1.2.3 (donde se incluye tema completo desarrollado).

Integrales impropias de primera especie.

Definition *Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[a,x]$, con $x\geq a$. Se define la **integral impropia de primera especie**, y se representará por $\int_a^{+\infty} f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

*Si este límite es finito, se dice que la integral impropia es **convergente** (y que su valor es el de dicho límite); si este límite es infinito, se dirá que la integral impropia es **divergente**.*

Remark *Notemos que los conceptos convergente/divergente, no tienen ningún sentido en el tema anterior de la integral definida, ya que la misma se define de forma que su resultado nos da el área comprendida entre la curva $f(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ (suponiendo que la curva es positiva), y este área siempre es finita (ya que la curva es acotada y el intervalo es compacto $[a,b]$), por lo que las integrales del tema anterior siempre son, trivialmente, convergentes.*

Example *Calcular*

$$a)\ \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} \qquad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} \qquad d)\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(x)dx$$

Proposition *(Generalización de la regla de Barrow para integrales impropias de 1ª especie) Sea $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $G(x)$ una primitiva suya para todo $x \geq a$. Entonces se verifica*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [G(x)]_a^{+\infty} \equiv G(+\infty) - G(a)$$

donde por $G(+\infty)$ representamos el resultado de

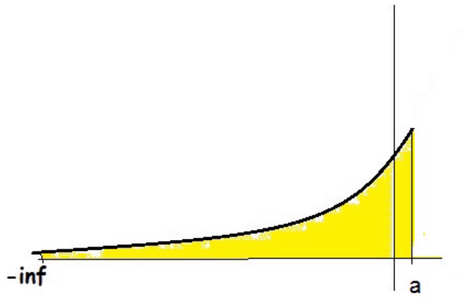
$$G(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} G(x)$$

Example *Volver a resolver las integrales del ejemplo anterior.*

Remark *De forma análoga se puede trabajar con integrales impropias de la forma $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$:*

Si $f : (-\infty,a] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[x,a]$, con $x \leq a$, se define

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt$$



Si este límite es finito, se dice que la integral impropia es ***convergente*** *(y que su valor es el de dicho límite); si este límite es infinito, se dirá que la integral impropia es* ***divergente****.*

De igual forma se puede establecer una versión generalizada de la regla de Barrow para este tipo de integrales: Se verifica que

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = [G(x)]_{-\infty}^{a} \equiv G(a) - G(-\infty)$$

donde por $G(-\infty)$ *representamos el resultado de*

$$G(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} G(x)$$

Example *Calcular*

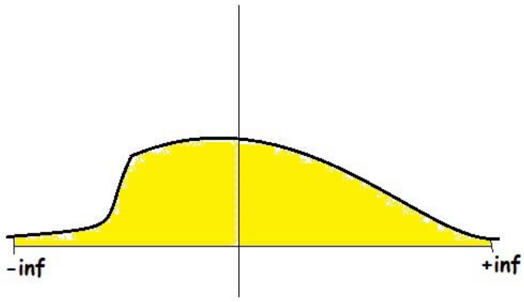
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$$

Remark *También podemos considerar integrales impropias de la forma* $\int_{-\infty}^{+\infty} f$*, aunque en este caso actuaremos de forma un poco distinta, como vemos a continuación:*

Si $f : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ *es una función integrable en cualquier intervalo compacto de la forma* $[x,y]$*, para calcular la integral* $\int_{-\infty}^{+\infty} f$*, actuaremos como sigue: Descompondremos el intervalo* $(-\infty,+\infty)$ *en dos intervalos de la forma* $(-\infty,a]$ *y* $[a,+\infty)$*, de manera que aplicaremos que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

y ***calcularemos cada una de ellas por separado****, tal y como hemos visto en los apartados anteriores. De esta forma, si ambas integrales* $\int_{-\infty}^{a} f$ *y* $\int_{a}^{+\infty} f$ *son convergentes, también lo será* $\int_{-\infty}^{+\infty} f$*, siendo su valor la suma de las dos anteriores; por el contrario,* ***en cuanto una de las dos*** *(*$\int_{-\infty}^{a} f$ *ó* $\int_{a}^{+\infty} f$*)* ***sea divergente****, también lo será* $\int_{-\infty}^{+\infty} f$*.*



Remark *Para este último caso* $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ ***NO utilizamos****, como podría ser lógico*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

ni tampoco usamos la regla de Barrow generalizada en la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = [G(x)]_{-\infty}^{+\infty} \equiv G(+\infty) - G(-\infty)$$

ya que el valor de este límite no tiene porqué coincidir con el de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

De hecho, al valor de $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$ *se le llama* ***Valor Principal*** *de* $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, *y se prueba que coincide con el verdadero valor de* $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ *si la integral impropia es convergente.*

Example *Calcular*

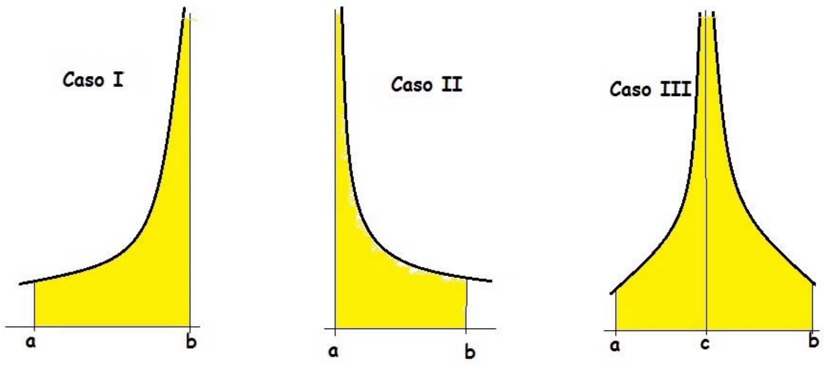
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^{x}}$$

Example *Estudiar, en función de* $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$ *la convergencia de*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx$$

Integrales impropias de segunda especie.

Este caso se corresponde con situaciones como las descritas por las gráficas siguientes:



Notemos que en el Caso I, la función tiene una asíntota vertical en la recta $x = b$, mientras que en los Casos II y III las asíntotas verticales están, respectivamente, en las rectas $x = a$ y $x = c$. Veamos como se pueden formalizar las integrales correspondientes:

Definition *Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada en el punto b, pero acotada e integrable en cualquier intervalo compacto de la forma $[a,x]$, con $x \leq b$. Se define la* ***integral impropia de segunda especie****, y se representará por $\int_a^{b^-} f$, como el resultado del cálculo del siguiente límite*

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

Si este límite es finito, se dice que la integral impropia es ***convergente*** *(y que su valor es el de dicho límite); si este límite es infinito, se dirá que la integral impropia es* ***divergente****. Su gráfica es la que corresponde al Caso I.*

Example *Calcular*

$$a) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx$$

Proposition *(Generalización de la regla de Barrow) Sea $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua no acotada en b y sea $G(x)$ una primitiva suya para todo $x \in [a,b)$. Entonces se verifica*

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = [G(x)]_a^{b^-} \equiv G(b^-) - G(a)$$

donde por $G(b^-)$ representamos el resultado de

$$G(b^-) = \lim_{x \to b^-} G(x)$$

Remark *De forma análoga se puede trabajar con integrales impropias de la forma $\int_{a^+}^b f(x)dx$:*

Si $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ es una función no acotada en el punto a, pero acotada e *integrable en cualquier intervalo compacto de la forma* $[x,b]$, *con* $x \geq a$, *se define*

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int_{x}^{b} f(t)dt$$

Si este límite es finito, se dice que la integral impropia es ***convergente*** *(y que su valor es el de dicho límite); si este límite es infinito, se dirá que la integral impropia es* ***divergente****. Su gráfica es la que corresponde al Caso II.*

De igual forma se puede establecer una versión generalizada de la regla de Barrow para este tipo de integrales: Se verifica que

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx = [G(x)]_{a^+}^{b} \equiv G(b) - G(a^+)$$

donde por $G(a^+)$ *representamos el resultado de*

$$G(a^+) = \lim_{x\to a^+} G(x)$$

y donde estamos suponiendo que $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua no acotada en b y* $G(x)$ *es una primitiva suya para todo* $x \in (a,b]$.

Example *Estudiar la convergencia de*

$$\int_{0}^{1} \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}dx$$

Remark *Un último caso lo tendremos para integrales de la forma* $\int_a^b f$, *donde la función no está acotada en un punto* $c \in (a,b)$. *Basándonos en lo anterior, actuaremos de la forma siguiente:*

Pondremos

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c^-} f(x)dx + \int_{c^+}^{b} f(x)dx$$

y calcularemos cada una de ellas por separado, tal y como hemos visto. De esta forma, ***si ambas*** *integrales* ($\int_a^{c^-} f$ *y* $\int_{c^+}^b f$) *son convergentes, también lo será* $\int_a^b f$, *siendo su valor la suma de las dos anteriores; por el contrario, en cuanto una de las dos* ($\int_a^{c^-} f$ *ó* $\int_{c^+}^b f$) *sea divergente, también lo será* $\int_a^b f$. *Su gráfica es la que corresponde al Caso III.*

Example *Probar que la siguiente integral es divergente*

$$\int_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Example *Estudiar la convergencia de*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

(Nota: Se trata de una integral impropia -el integrando tiene una discontinuidad en $x = 1$, y que es convergente -con valor -; éste es el mismo resultado que se obtiene si se resuelve la integral de forma directa -sin tener en cuenta que es impropia-, pero no es correcto calcularla de esta segunda forma).

Criterios de convergencia.

En muchas ocasiones es imposible calcular las correspondientes integrales impropias (por el hecho de que no sabemos como obtener una primitiva suya), pero sí que es posible decir si la integral es convergente o divergente (independientemente del cálculo de la misma; así, si sabemos que la integral es divergente, evidentemente su resultado valdrá $\pm\infty$; sin embargo, si conociésemos que es convergente, podríamos aplicar un método aproximado -por ejemplo, un método numérico- para aproximar su valor).

Los principales Criterios de Convergencia para este tipo de integrales impropias (ya sean de 1ra o 2da especie), y que, básicamente, nos dicen si las mismas son convergentes o divergentes a raíz de analizar como son las funciones que aparecen en el integrando de este tipo de integrales, se pueden ver en el Anexo 1.2.3, que se incluye junto a este tema en el Aula Virtual.

Ejercicios resueltos.

1. *(1er Parcial. Febrero 2017)* Calcular

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$$

Solución: Realizaremos el cambio de variable $x = t^2$, de manera que (observar que se obtienen los mismos límites de integración para la variable t que para x, ya que si $x = 1$, entonces $t = 1$; idem para $x = +\infty$)

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2}}{(1+t^2)^2}\,2tdt = \int_{1}^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$$

Esta última integral la resolvemos por el método de Hermite (ya que el denominador tiene raíces complejas múltiples):

Aplicando la descomposición de este método, tendremos

$$\frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{Ct+D}{1+t^2}\right)$$

es decir

$$\frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C(1+t^2)-(Ct+D)2t}{(1+t^2)^2}$$

y operando y calculando los coeficientes, resulta $A = 0$, $B = 1$, $C = -1$ y $D = 0$, por lo que

$$\frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{0t+1}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{-1t+0}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{-t}{1+t^2}\right)$$

Por todo lo anterior

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\frac{-t}{1+t^2}\right)dt = \left[\arctan t + \frac{-t}{1+t^2}\right]_1^{+\infty} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\arctan t - \frac{t}{1+t^2}\right) - \left(\arctan 1 - \frac{1}{1+1^2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Ejercicios propuestos.

Ver los Ejercicios Propuestos en el Tema 1.2.4.