Asignatura: **Matemáticas I**

Profesor: **Roque Molina Legaz**

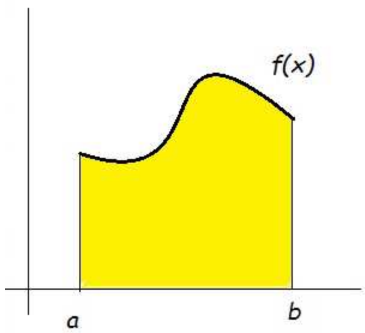
TEMA 1.2.2: LA INTEGRAL DE RIEMMAN (INTEGRAL DEFINIDA).

PROGRAMA DETALLADO:

- **Introducción**. **Definición**.
- Partición de un intervalo.
- Sumas inferiores y sumas superiores. Definición de función integrable (en sentido Riemann).
- Sumas de Riemann. Aplicación al cálculo de límites de sucesiones.
- **Propiedades de las funciones integrables**.
- **Función integral**. **Regla de Barrow**.
- **Métodos elementales de integración**.
- **Ejercicios resueltos**.
- **Ejercicios propuestos**.

Introducción. Definición.

La integral definida se origina a partir del concepto de área. Imaginemos que pretendemos calcular el área comprendida entre la curva $f(x)$ con $a \leq x \leq b$, donde se supondrá que la función f está acotada y es positiva en el intervalo $[a,b]$, es decir, el área de la región sombreada en la gráfica siguiente:



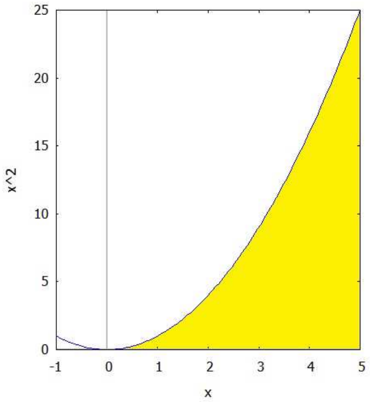
Inicialmente, a este área lo vamos a representar por la expresión

$$\int_a^b f(x)dx$$

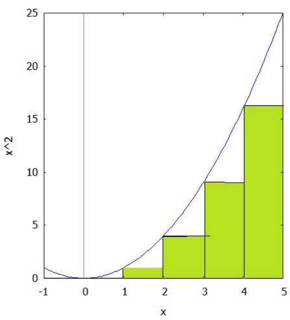
expresión a la que denominaremos "integral definida" o "integral de Riemman", como estableceremos con posterioridad.

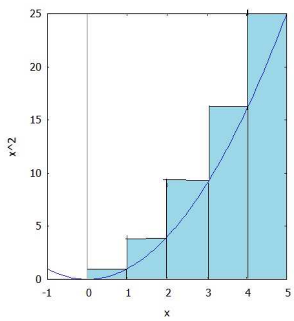
Remark *El representar, inicialmente, a este área mediante el símbolo "integral definida" se hace así, ya que cuando obtengamos su valor, el resultado obtenido, y siempre que la función $f(x)$ sea positiva en el intervalo $[a,b]$, nos dará efectivamente el valor de dicho área; de hecho, iremos estableciendo este concepto de "integral definida", para que su resultado nos ese valor.*

El procedimiento que vamos a seguir para obtener este resultado va a ser el de aproximar el área que pretendemos obtener por el área de determinados rectángulos (cuyas áreas son inmediatas de calcular). Para ilustrar lo que vamos a realizar desde un punto de vista teórico, supongamos que pretendemos calcular el área que la función $f(x) = x^2$ encierra entre el eje Ox y las rectas $x = 0$ y $x = 5$, es decir, el área representada por la figura siguiente:



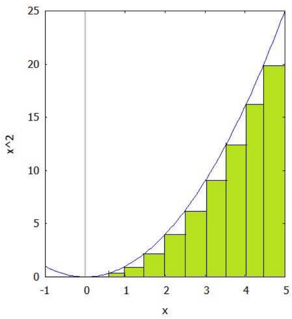
Para obtener una primera aproximación al área que pretendemos calcular, podemos considerar las áreas de los siguientes rectángulos:

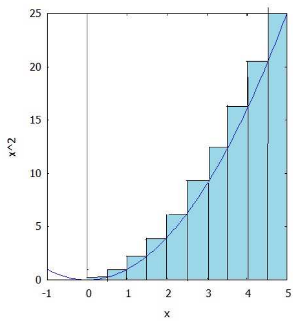




Notemos que en la primera gráfica se obtiene una aproximación al área por "defecto" (siendo su resultado $1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 16 \cdot 1 = 30$), mientras que en la segunda se obtiene una aproximación por "exceso" (con resultado $1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 25 \cdot 1 = 55$). Al resultado obtenido en la primera gráfica será lo que llamaremos "suma inferior", mientras que el de la segunda lo llamaremos "suma superior".

También observamos que se obtendrá una mejor aproximación al área si el intervalo $[0, 5]$ lo dividimos en más "trozos", obteniendo, por tanto, más rectángulos, como observamos en las gráficas siguientes:





En estas gráficas hemos considerado el doble de rectángulos (cada uno de ellos de base 0.5 ud.) que en las gráficas iniciales (cuya base era de 1 ud.), obteniendo como resultado de la aproximación por defecto 35.625, mientras que la aproximación por exceso nos da 48.125. Con posterioridad, podremos establecer que el valor exacto del área que pretendemos calcular (y que es podrá calcular a través de lo que llamaremos Regla de Barrow) es de $\frac{125}{3} \simeq 41.67$.

Por tanto, observamos que cuando se consideran más divisiones del intervalo de integración, tanto la aproximación por defecto como por exceso nos dan resultados que aproximan mejor al área que pretendemos calcular (puesto que la aproximación por defecto cada vez deja "menos" huecos por debajo de la curva, mientras que la aproximación por exceso deja "menos" huecos por encima de la misma). Por tal motivo, y como estableceremos formalmente a continuación, la "idea" que vamos a desarrollar para obtener el valor del área considerada consistirá en dividir el intervalo de integración en "infinitos" subintervalos, cada uno de ellos teniendo una amplitud (que será la base de un correspondiente rectángulo) infinitesimal. Al final sumaremos el área de estos infinitos rectángulos y obtendremos el área pedida. Por tal motivo, calcular una integral definida no será sino calcular la suma de infinitos números, es decir, una integral definida será el valor de la suma de una serie numérica (materia que hemos estudiado en temas anteriores).

La formalización de todo ésto la vemos en las subsecciones siguientes. Como además estableceremos, inicialmente vamos a tener dos problemas diferentes: ¿cuando una función acotada $f(x)$ es integrable (en sentido de Riemman) en un intervalo compacto $[a,b]$? Y suponiendo que lo sea, ¿cómo se calcula el valor de la integral definida de $f(x)$ en $[a,b]$? También vamos a justificar porqué, habitualmente, solo resolveremos el último de estos dos problemas, es decir, porque "pasamos" directamente al cálculo de la integral definida (sin "pensar" sí es integralble la función que dada).

Partición de un intervalo.

Definition *Dado un intervalo de la recta real, $[a,b]$, se dice que el conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una **partición** de $[a,b]$, si se verifica que*

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

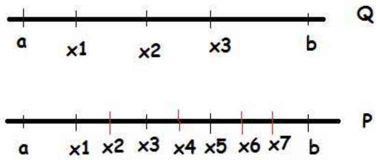
*Se llama **norma de la partición** P, y se representa por $\|P\|$, a la mayor distancia entre dos puntos consecutivos de la misma, es decir*

$$\|P\| = \max_{i=1,\ldots,n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

En otras palabras, considerar una partición de un intervalo no es sino dividirlo en trozos más pequeños, es decir, una partición nos divide el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos $[a = x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n = b]$; además, la *norma* de dicha partición la longitud del trozo mayor.

Definition *Dadas dos particiones de un mismo intevalo, P y Q, se dice que P es **más fina** que Q si $\|P\| < \|Q\|$ y todos los puntos de Q también están en P; es decir, si P divide al intervalo en más subintervalos y éstos son más pequeños que los de Q.*

A continuación incluimos las gráficas de dos particiones de un mismo intervalo $[a,b]$, observando que la partición P es más fina que la partición Q :



Sumas inferiores y sumas superiores. **Definición de función integrable (en sentido Riemann)**.

En todo lo que resta de tema, consideraremos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en este intervalo compacto. En el tema siguiente veremos que es lo que ocurre cuando la función no está acotada y/o cuando el intervalo no es compacto (por ejemplo, si es de la forma $[a,+\infty)$).

Consideramos una partición P de $[a,b]$ que lo divide en n subintervalos $[a = x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n = b]$. Podemos considerar los valores extremos que toma la función f en cada uno de ellos, a los que denotaremos por

$$m_i = \min\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \max\{f(x);\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Así, los productos $m_i(x_i - x_{i-1})$ y $M_i(x_i - x_{i-1})$ representan, respectivamente, las áreas de los rectángulos que tienen por base el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y por altura los valores extremos de dicha función.

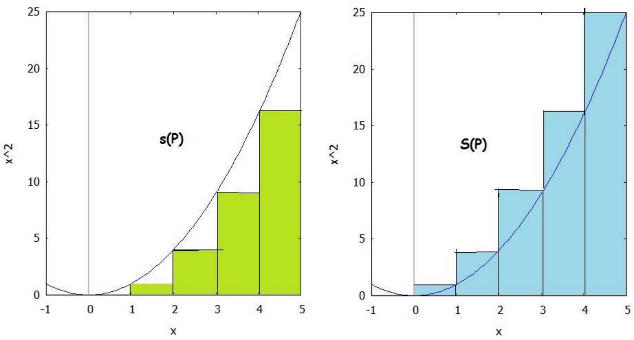
Definition *Se denomina **suma inferior** de la partición P asociada a la función f en el intervalo $[a,b]$, a la suma formada por todas las áreas de los rectángulos inferiores en cada subintervalo, es decir*

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

*Se denomina **suma superior** de la partición P asociada a la función f en el intervalo $[a,b]$, a la suma formada por todas las áreas de los rectángulos inferiores en cada subintervalo, es decir*

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Obviamente estas sumas dan una aproximaciones por defecto (la suma inferior) y por exceso (la suma superior) del área que pretendemos obtener. Esta propiedad la ilustramos nuevamente con una gráfica anterior (donde, por comodidad, hemos tomado una función $f(x)$ creciente y una partición del intervalo $[0,5]$ que lo divide en 5 subintervalos; la misma construcción puede realizarse con cualquier otra función $f(x)$ que no sea ni creciente ni decreciente, siempre que esté acotada en cualquier intervalo compacto $[a,b]$):



Veamos algunas propiedades que tienen este tipo de sumas:

Proposition *En las anteriores condiciones, se verifican:*

a) $s(P) \leq \text{Área} \leq S(P)$.

b) $m(b-a) \leq s(P)$, *siendo* $m = \min\{f(x);\ x \in [a,b]\}$. *Ver interpretación gráfica de esta desigualdad.*

c) $S(P) \leq M(b-a)$, *siendo* $M = \max\{f(x);\ x \in [a,b]\}$. *Ver interpretación gráfica de esta desigualdad.*

Remark *Notemos que las cantidades* $m(b-a)$ *y* $M(b-a)$ *son cantidades fijas (sólo dependen de como es la función* $f(x)$ *y no dependen de las particiones que consideremos. Sin embargo las cantidades* $s(P)$ *y* $S(P)$ *sí que dependen de como es* $f(x)$ *y de como es la partición P que se haya tomado.*

A raíz de estos últimos resultados, podemos concluir que

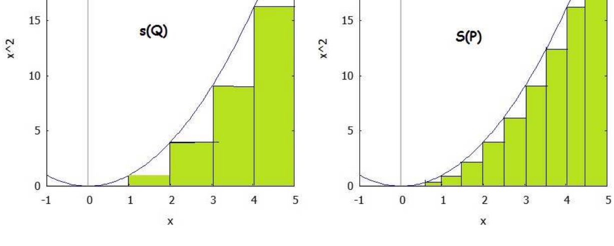
$$m(b-a) \leq s(P) \leq \text{Área} \leq S(P) \leq M(b-a)$$

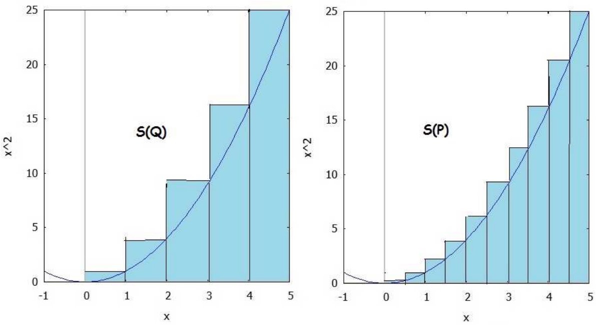
lo que nos lleva a poder deducir que, en particular, cualquier suma inferior está acotada superiormente por $M(b-a)$, *mientras que cualquier suma superior está acotada inferiormente por* $m(b-a)$.

Proposition *Sean P y Q dos particiones de un mismo intervalo* $[a,b]$, *con P más fina que Q. Entonces:*

a) $s(P) \geq s(Q)$.

b) $S(P) \leq S(Q)$.





En base a las anteriores consideraciones, se observa que la aproximación al área encerrada bajo la curva se mejora al tomar particiones del intervalo cada vez más finas con norma tendiendo a cero (es decir, considerando un número de subdivisiones del intervalo $[a,b]$ que tienda a infinito).

Así, si se considera una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$, (P_n), cada vez más finas con norma tendiendo a cero, y calculando para cada una de ellas sus correspondientes sumas inferior y superior, obtendremos, respectivamente, la sucesión de sumas inferiores $(s(P_n))$

$$s(P_1) \leq s(P_2) \leq \ldots \leq s(P_n) \leq \ldots$$

y la de sumas superiores $(S(P_n))$

$$S(P_1) \geq S(P_2) \geq \ldots \geq S(P_n) \geq \ldots$$

La primera de ellas es monótona creciente y acotada superiormente por $M(b-a)$ (recordamos que, en base a una propiedad anterior, cualquier suma inferior está acotada superiormente por esta cantidad fija), mientras que la segunda es monótona decreciente y acotada inferiormente por $m(b-a)$ (idem, cualquier suma superior está acotada inferiormente por esta cantidad fija). Por tanto, ambas sucesiones son convergentes. Así, tiene sentido considerar la siguiente definición:

Definition *Se llama **integral inferior** de f en el intervalo $[a,b]$, al límite de la sucesión de sumas inferiores obtenida anteriormente, y se representa por $\underline{\int_a^b} f$; análogamente, se llama **integral superior** de f en el intervalo $[a,b]$, al límite de la sucesión de sumas superiores obtenida anteriormente, y se representa por $\overline{\int_a^b} f$; es decir*

$$\underline{\int_a^b} f = \lim s(P_n); \quad \overline{\int_a^b} f = \lim S(P_n)$$

Remark *Observamos que la integral inferior no es sino el valor que se obtendría si cada vez vamos tomando particiones más finas del intervalo $[a,b]$, y para cada una de éstas se va aproximando el área por "debajo" (es decir, cuando se toman infinitos rectángulos de base infinitesimal y sumamos las áreas de todos éstos). Análogamente, la integral superior es el valor límite que se obtiene al aproximar por "encima" cuando se toman estos infinitos rectángulos.*

Como consecuencia de lo anterior, es inmediato comprobar que el área de la función *f* se encuentra entre estos dos valores.

Definition *Se dice que una función $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ es **integrable (en sentido Riemann)** cuando coinciden la integral inferior y superior de f en el intervalo $[a,b]$, es decir, cuando*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

*y a dicho valor común se le denomina **integral definida** de f en $[a,b]$, y se representa por $\int_a^b f(x)dx$.*

Remark *Notamos que una función es integrable cuando al aproximar (en base a las anteriores consideraciones) por "debajo" y por "encima", se obtiene el mismo resultado. Se dice que este valor es el valor de la integral definida.*

Remark *Observamos por tanto que hemos introducido dos conceptos, inicialmente distintos, pero relacionados: Por un lado, tenemos lo que significa que una función sea **integrable** en un intervalo (lo que ocurre cuando coinciden los valores de su integral inferior y de su integral superior); mientras que, por otro lado, tenemos cómo se calcula el **valor** de la integral definida (para lo que calcular el límite de las sumas inferiores y/o de las sumas superiores, ya que ambos coinciden cuando la función es integrable).*

Example *Probar que la función*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x\in\mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable en $[0,2]$.

Otro resultado, también teórico, aunque algo más práctico que el de la anterior definición, y que nos permite establecer cuando una función es integrable, es:

Proposition ***(Criterio de Integrabilidad)*** *Sea $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si $\forall\varepsilon>0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(P)-s(P)<\varepsilon$.*

Example *Probar que $f(x)=x^2$ es integrable en $[0,1]$ y calcular el valor de su integral.*

Sumas de Riemann. Aplicación al cálculo de límites de sucesiones.

Otro procedimiento, también dificultoso, aunque con interesantes aplicaciones, de calcular el valor de la integral definida es por medio del estudio de las denominadas *sumas de Riemann* de una partición: Supongamos que f es una función integrable en $[a,b]$, y sea P una partición de dicho intervalo en subintervalos $[x_{i-1},x_i]$. Si ξ_i es un punto arbitrario de dicho subintervalo, se verifica, trivialmente, que $m_i\le f(\xi_i)\le M_i$ $(\forall i=1,2,\ldots,n)$, por lo que se tendrá

$$s(P)\le\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\le S(P)$$

Definition *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable y sea P una partición de $[a,b]$. Se denomina* ***suma de Riemann*** *de f en $[a,b]$ asociada a P, al valor*

$$S_R(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

donde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Entonces, si se toma una sucesión (P_n) de particiones de $[a,b]$, cada vez más finas y con norma tendiendo a cero, y si para cada una de ellas se calculan las sumas inferiores, superiores y de Riemann, se obtendrán 3 sucesiones numéricas tales que sus términos generales verifican

$$s(P_n) \leq S_R(P_n) \leq S(P_n)$$

Al ser, por hipótesis, la función *f* integrable en $[a,b]$, sabemos que

$$\lim s(P_n) = \lim S(P_n) = \int_a^b f(x)dx$$

por lo que también habrá de ser

$$\lim S_R \equiv \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Por tanto, otra forma de calcular el valor de la integral de una función en $[a,b]$ (una vez que se tiene la certeza de que dicha función es integrable) es mediante el límite de la correspondiente suma de Riemann. La ventaja que depara utilizar esta última forma de obtener el valor de la integral es que se pone de manifiesto que el valor de la misma es independiente de la sucesión de particiones (P_n) que se tome del intervalo $[a,b]$ y de los puntos arbitrarios ξ_i. Por tanto, y desde un punto de vista práctico, se recomienda el uso de las siguientes elecciones:

- Tomaremos como partición de $[a,b]$ aquella que lo divide en n partes iguales, es decir,

$$P_n = \left\{ a = x_0,\ x_1 = a + \frac{b-a}{n},\ x_2 = a + 2\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b \right\}$$

(notemos que la norma de esta partición, $\|P_n\| = \frac{b-a}{n}$, converge a 0 cuando n tiende a infinito).

- En cada subintervalo de la partición $[x_{i-1}, x_i] = \left[a + (i-1)\frac{b-a}{n}, a + i\frac{b-a}{n} \right]$, se tomará como punto intermedio ξ_i el extremo superior de dicho intervalo, es decir

$$\xi_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

En base a estas consideraciones, el cálculo de la integral de Riemann de *f* en $[a,b]$ puede obtenerse a partir del límite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n} \right)$$

Remark *Como podemos observar, ya sea a través de la definición de integral o a través de sumas de Riemann, calcular una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ no es sino calcular la suma de una serie numérica.*

Example *Probar que la función $f(x) = e^x$ es integrable en $[0,1]$ y calcular el valor de su integral mediante sumas de Riemann.*

Cálculo de límites de sucesiones mediante sumas de Riemann (es decir, mediante integrales definidas).

Además de servirnos para el cálculo de integrales definidas, las sumas de Riemann también tienen otra interesante aplicación, que es el cálculo de algunos límites de sucesiones. La idea consiste, básicamente, en expresar un determinado límite de una sucesión como una suma de Riemann; de esta forma, el cálculo de dicho límite, y usando la anterior igualdad, se reduce al cálculo de una integral definida (aunque para ello, habremos de establecer una forma diferente de calcular integrales definidas; esta forma, como se verá posteriormente, será la regla de Barrow).

Remark **Example** *Calcular los siguientes límites de sucesiones:*

a) $\lim \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$.

b) $\lim\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+n}\right)$

Propiedades de las funciones integrables.

Veamos a continuación algunas propiedades que verifican las funciones integrables:

Proposition *Se verifican, por definición de integral definida:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Proposition *Se verifican, para una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada:*

a) Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

b) Si f es monótona en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

c) Si f es continua en $[a,b]$ salvo en un número finito de puntos, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Remark *Hemos de observar que los tres resultados establecidos en esta última propiedad nos permiten asegurar que existe una cantidad muy grande de funciones que son integrables, ya que son integrables todas aquellas funciones que son contínuas, o que son monótonas, o que tienen un número finito de puntos de discontinuidad, etc. Notamos por tanto la ventaja que conlleva este último resultado, puesto que nos permite establecer cuando una función es integrable sin necesidad de tener que establecer previamente su integrabilidad en base a la definición de función integrable o del Criterio de Integrabilidad.*

Es precisamente por este motivo por el que a la hora de estudiar si nuestros dos problemas tienen solución, es decir si una función $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y, en caso de que lo sea, calcular el valor de $\int_a^b f(x)dx$, normalmente pasaremos directamente a resolver el segundo de los problemas, es decir, calcularemos (como buenamente podamos) el valor de la integral definida, ya que, por regla general, *siempre estaremos trabajando con funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ o calculando éstas en subintervalos donde lo sean; es decir, en la práctica siempre solemos trabajar con funciones de las que sabemos previamente que son integrables, sin necesidad de tener que recurrir a establecer la integrabilidad de las mismas.*

Proposition *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$. Se verifican:*

a) Si $c\in(a,b)$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

b) Si $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $\alpha\cdot f$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b \alpha\cdot f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$$

c) Si $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ es otra función integrable en $[a,b]$, entonces $f\pm g$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

d) Si $f(x)\geq 0$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

e) Si $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ es otra función integrable en $[a,b]$, con $f(x)\leq g(x)$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

f) La función $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Remark *Si $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ es otra función integrable en $[a,b]$, el producto $f(x)\cdot g(x)$ es integrable en $[a,b]$, pero*

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))dx \neq \int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx$$

No obstante, puede establecerse una relación entre la integral del producto y el producto de las integrales: Esta relación es conocida como ***Desigualdad de Schwartz*** *y establece que*

$$\left(\int_a^b (f(x)\cdot g(x))dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2dx\cdot\int_a^b (g(x))^2dx$$

Theorem ***(Teorema de la Media Integral)*** *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Exercise *Interpretar gráficamente la igualdad del teorema de la media.*

Example *Probar que*

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\, dx \leq 3$$

Función integral. Regla de Barrow.

En esta sección podremos observar la importancia que tiene en el cálculo práctico de las integrales definidas el conocer una primitiva de dicha función (por tal motivo hemos visto Cálculo de Primitivas en el tema anterior). Este resultado será el conocido como *Regla de Barrow*.

Previo a establecer este resultado (especialmente para realizar su demostración), precisamos de otro concepto (*función integral*) y de alguna de sus propiedades:

Definition *A toda función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que sea integrable le podemos asociar una nueva función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

llamada ***función integral*** *asociada a f en $[a,b]$.*

Pueden establecerse determinadas propiedades para esta nueva función F a partir de propiedades que verifique la función original f :

Proposition ***(1er teorema fundamental del Cálculo Integral)*** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$.*

Proposition ***(Segundo teorema fundamental del Cálculo Integral)*** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en $[a,b]$ y se verifica que $F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$.*

Example *Establecer la derivada de las siguientes funciones integrales:*

a) $F(x) = \int_a^x \cos(t)dt$. Hacerlo calculando previamente la integral y sin calcularla.

b) $F(x) = \int_a^x \cos(t^2)dt$. Observar que aunque es imposible resolver la integral (y por tanto dar una expresión para F libre de integrales), sí que es posible obtener la derivada $F'(x)$.

Example *Idem para*

$$c)\ F(x) = \int_0^{x^3} \cos(t^2)dt \qquad d)\ F(x) = \int_{e^x}^{x^3} \cos(t^2)dt$$

Este último resultado nos indica que las funciones integrables están relacionadas con el concepto de función primitiva de una función f :

Recordamos una definición establecida en el tema anterior:

Definition *Una función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable se dice que es una **primitiva** de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si se verifica que $G'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$.*

Remark *Una misma función f puede tener infinitas primitivas, sin embargo la diferencia entre dos cualesquiera de ellas siempre es una constante. Es por este motivo por el que a la primitiva de una función continua suele denotarse por*

$$\int f(x)dx + Cte$$

Remark *Del 2º th. fundamental del C. Integral se deduce que si f es continua, su función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ siempre es una primitiva suya. Esto nos permite calcular de forma inmediata primitivas de una función, aunque no siempre va a ser práctico usar este resultado. Así, si nos piden obtener una primitiva de la función $f(x) = \sin(x)$, siempre podemos decir que una primitiva de la misma viene dada por*

$$F(x) == \int_a^x \sin(t)dt$$

ya que la derivada de esta $F(x)$ (y sin necesidad de calcular la integral que aparece en su expresión) nos da $\sin(x)$; pero, evidentemente, no es ésta la forma en la que nos interesa la primitiva de $f(x) = \sin(x)$, sino que desde un punto de vista práctico será mejor decir que una primitiva de $f(x) = \sin(x)$ viene dada, como establecimos en el tema anterior, por

$$F(x) = \int \sin(x)dx = -\cos(x) + Cte$$

La importancia del cálculo de primitivas, y por ello la importancia entre lo establecido entre este tema y el tema anterior, se observa a partir del siguiente resultado, que nos permitirá calcular integrales definidas sin tener que acudir a su correspondiente definición (es decir, sin tener que realizar cálculo de límites de sucesiones). Para la demostración del mismo (que podemos ver en el Anexo de este tema), es preciso el concepto de función integral:

Proposition ***(Regla de Barrow)*** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva suya, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \equiv [G(x)]_a^b$$

Métodos elementales de integración.

En esta última sección vamos a volver a ver dos de los típicos métodos de integración, pero desde el punto de vista de la integral definida. Incidiremos especialmente en el método de integración por cambio de variable, ya que al realizar el mismo en una integral definida, también es preciso **cambiar las cotas de integración**:

Proposition ***(Integración por cambio de variable)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ una función de clase $\mathcal{C}^{(1)}$ en $[\alpha,\beta]$, y tal que $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$. Entonces se verifica*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Example *Calcular $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.*

Proposition ***(Integración por partes)*** *Sean $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas y tales que sus funciones derivadas u' y v' son integrables en $[a,b]$. Entonces se verifica*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

expresión que suele abreviarse en la forma

$$\int_a^b u \cdot dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Ejercicios resueltos.

1. (1er Parcial. Febrero 2015) Expresar el siguiente límite como una integral, y calcular la misma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \sqrt{n^2-3^2} + \ldots \sqrt{n^2-n^2}}{n^2}$$

Solución: Se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \sqrt{n^2-3^2} + \ldots \sqrt{n^2-n^2}}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} + \frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n} + \ldots + \frac{\sqrt{n^2-n^2}}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-i^2}}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

Esta última integral la calculamos mediante el cambio $x = \sin t$ (donde $dx = \cos t \cdot dt$). Además, si $x = 0$, entonces $t = 0$, mientras que si $x = 1$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$. De esta forma

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicios propuestos.

Ver los Ejercicios Propuestos en el Tema 1.2.4.