Asignatura: **Matemáticas I**

Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 1.2.1: CÁLCULO DE PRIMITIVAS

PROGRAMA DETALLADO:

- **Primitivas de las funciones elementales**.
- **Métodos elementales de integración**.
- Integración por cambio de variable (cambios elementales).
- Integración por partes.
- **Integración de funciones racionales**.
- Caso I: $Q(x) = 0$ sólo tiene raíces reales simples.
- Caso II: $Q(x) = 0$ tiene raíces reales múltiples.
- Caso III: $Q(x) = 0$ tiene raíces complejas simples.
- Caso IV: $Q(x) = 0$ tiene raíces complejas múltiples.
- **Integración de funciones de tipo trigonométrico**.
- **Integración de algunas funciones irracionales**.
- **Ejercicios resueltos**.
- **Ejercicios propuestos**.

El cálculo de primitivas (o integrales indefinidas), proviene en gran medida de la estrecha relación existente entre la integrabilidad y la diferenciabilidad, puesto que, como sabemos, una primitiva de una función real $f(x)$ no es más que una función derivable $F(x)$ tal que su derivada coincide con la función inicial; es decir, tal que

$$F'(x) = f(x)$$

Puesto que también es conocido que una función continua admite infinitas primitivas, pero que dos cualesquiera de ellas se diferencian en una constante, a la familia formada por todas las primitivas de una misma función $f(x)$, la denotaremos por

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

En este primer tema dedicado al Cálculo Integral de funciones de una variable, vamos a realizar un rápido recordatorio de algunos métodos de integración "más o menos" elementales, así como introduciremos brevemente otros procedimientos (no tan elementales como los primeros) y que nos ayudarán a calcular determinadas primitivas.

Remark *No se trata de ser exahustivo impartiendo excesivos métodos de cálculo de primitivas, sino que sólo veremos unos pocos, dedicando una especial atención a métodos de cálculo que tienen que ver con cambios de variable (en este caso, cambios no elementales). El objetivo principal es que el alumno comprenda como funcionan los cambios de variable dentro de una primitiva, aunque, inicialmente, al mismo no se le ocurra cual puede ser el cambio de variable a realizar. De esta forma, y como en todos los cambios de variable se actuará de forma similar, cuando tenga que resolver una primitiva en ésta o en cualquier otra asignatura, podrá calcular la misma sin más que le indiquen el correspondiente cambio a realizar.*

Remark *El concepto de función primitiva y alguna de las propiedades a las que nos* *hemos referenciado en el primer párrafo anterior, se establecen en el tema de la Integral Definida (de Riemann), que en esta asignatura veremos con posterioridad a éste que ahora nos ocupa (será el Tema 1.2.2). Aun siendo el tema 1.2.2 el que deberíamos de impartir antes que éste, preferimos hacerlo en el orden aquí establecido, ya que suele ser de esta forma como lo han visto los alumnos en su etapa educativa anterior.*

Primitivas de las funciones elementales.

Precisamente por lo que hemos comentado de la estrecha relación existente entre integrabilidad y derivabilidad, y al igual que ocurre con este segundo concepto, es aconsejable conocer unas cuantas primitivas elementales, la mayoría de las cuales las tenemos en la siguiente tabla:

Tipo	**Funciones simples**	**Funciones compuestas**
Potencia :	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$	$\int (f(x))^n f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + K$
Logaritmo :	$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + K$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log\lvert f(x)\rvert + K$
Exponenciales :		
	$\int e^x dx = e^x + K$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + K$
	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + K$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\log(a)} + K$
Trigonométricas :		
	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + K$	$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x)) + K$
	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + K$	$\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + K$
	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + K$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \tan(f(x)) + K$
	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + K$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2(f(x))} dx = -\cot(f(x)) + K$
Hiperbólicas :		
	$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + K$	$\int \cosh(f(x)) f'(x) dx = \sinh(f(x)) + K$
	$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + K$	$\int \sinh(f(x)) f'(x) dx = \cosh(f(x)) + K$

Tipo	Funciones simples	Funciones compuestas

Arco – argumento :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + K \qquad \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{1-(f(x))^2}} = \arcsin(f(x)) + K$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + K \qquad \int \frac{f'(x)dx}{1+(f(x))^2} = \arctan(f(x)) + K$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh}(x) + K \qquad \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \operatorname{argsinh}(f(x)) + K$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh}(x) + K \qquad \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{(f(x))^2-1}} = \operatorname{argcosh}(f(x)) + K$$

Example *Calcular las siguientes primitivas inmediatas:*

$$a)\ \int \sin(3x)dx \qquad b)\ \int 2^{3x}dx \qquad c)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}dx \qquad d)\ \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$e)\ \int \frac{dx}{1+3x^2} \qquad f)\ \int \frac{x}{1+x^4}dx \qquad g)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+3x^2}}dx \qquad h)\ \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$$

Métodos elementales de integración.

Integración por cambio de variable (cambios elementales).

Recordaremos en esta sección como funciona el cambio de variable dentro de una integral indefinida. Los cambios que aquí veremos, serán cambios elementales (de los que se les suele ocurrir a uno sin más que mirar la integral), aunque el cambio funciona siempre de la misma forma, independientemente de que el cambio sea elemental o no tan trivial.

Recordamos que las integrales que pueden resolverse mediante cambios de variable elementales son aquellas en las que en su integrando aparece una función elemental (que no tiene porqué ir sola, sino que puede aparecer dividiendo, o dentro de una trigonométrica, o como exponente de una exponencial, etc.) y también aparece su derivada multiplicando. Ésto se debe a que si en una primitiva se realiza el cambio de variable $x = g(t)$ (es decir, se pasa de la variable x a una nueva variable t), se verifica la fórmula

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

También suele ser habitual aplicar un cambio de variable sencillo para que, por ejemplo, nos desaparezca una raíz cuadrada, como vemos en alguno de los ejemplos siguientes:

Example *Calcular, mediante un cambio de variable elemental, las siguientes primitivas inmediatas:*

$$a)\ \int x\sin(3x^2)dx \qquad b)\ \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \qquad c)\ \int x\sqrt{3x-4}\,dx \qquad d)\ \int xe^{-x^2/2}dx$$

Integración por partes.

Este procedimiento se basa en la conocida fórmula, que se deduce de forma inmediata de la derivada de un producto,

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Example *Calcular, mediante integración por partes, las siguientes primitivas:*

$$a)\ \int x\log(1+x^2)dx \qquad b)\ \int \arctan(x)dx \qquad c)\ \int \log(1+x^2)dx \qquad d)\ \int x^2e^xdx$$

Integración de funciones racionales.

En esta sección vamos a ver como se resuelve de forma completa cualquier primitiva que venga dada por un cociente de polinomios

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

pero siempre y cuando conozcamos cuales son las raíces (soluciones) que tenga el polinomio denominador $Q(x)$.

Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el grado de $P(x)$ es siempre menor que el grado de $Q(x)$, ya que si fuese grado(P) $\geq$grado(Q), siempre podríamos efectuar el cociente de ambos polinomios. De esta forma, obtendríamos un polinomio cociente $C(x)$ y un polinomio resto $R(x)$, verificándose que

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$$

Así, tendremos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{Q(x)C(x)+R(x)}{Q(x)}\right)dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

por lo que nuestra integral inicial será suma de la integral de un polinomio $C(x)$ (que es inmediata), y de la integral de un cociente de polinomios, pero en esta última se tiene que el grado del numerador es siempre menor que el del denominador.

Example *Si descomponemos según la expresión anterior, tendremos*

$$\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+13}dx = \int(x-4)dx + \int \frac{2x+52}{x^2+4x+13}dx$$

de donde observamos que la primera primitiva es inmediata. A continuación veremos como calcular la segunda de ellas.

Una vez establecido este preámbulo, podemos pasar a ver como se resuelven este tipo de integrales. Para ello, distinguiremos 4 casos, según que sean las raíces que tiene el polinomio denominador $Q(x)$. Cada uno de los casos que vemos a continuación incluye a los anteriores:

Caso I: $Q(x) = 0$ sólo tiene raíces reales simples.

En este caso, la fracción inicial se descompone en fracciones simples del tipo

$$\frac{1}{x-\alpha_i}$$

por cada una de las raíces del denominador α_i. Como se puede observar, la primitiva de cada una de estas fracciones es un logaritmo neperiano.

Lo vemos directamente con ejemplos prácticos.

Example *Si queremos calcular*

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$$

tendremos que realizar la descomposición

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$$

y operando se llega a

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1/2}{x-3} + \frac{-1/2}{x-1}$$

por lo que

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int \frac{1/2}{x-3}dx + \int \frac{-1/2}{x-1}dx = \frac{1}{2}\log|x-3| - \frac{1}{2}\log|x-1|$$

Caso II: $Q(x) = 0$ tiene raíces reales múltiples.

En este caso, cada una de las raíces simples α_i se descomponen en fracciones del tipo

$$\frac{1}{x-\alpha}$$

mientras que cada una de las raíces múltiples β_i se descomponen en la forma

$$\frac{1}{x-\beta_i} + \frac{1}{(x-\beta_i)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-\beta)^{n_j}}$$

donde suponemos que cada raíz múltiple β_i tiene multiplicidad n_j.

Como se puede observar, la primitiva de cada una de estas fracciones, o es un logaritmo neperiano o son integrales del tipo $\int \frac{dt}{t^n}$.

Lo vemos directamente con ejemplos prácticos.

Example *Para calcular*

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx$$

realizamos la descomposición

$$\frac{x^2+1}{x^4-x^2} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}$$

y operando se llega a

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)x^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} + \frac{0}{x} + \frac{-1}{x^2}$$

por lo que

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{-1}{x^2}dx =$$
$$= \log|x-1| - \log|x+1| + \frac{1}{x}$$

Caso III: $Q(x) = 0$ tiene raíces complejas simples.

Cada una de las raíces reales simples y/o múltiples se descomponen como hemos visto en los casos anteriores, y sabemos que sus primitivas serán logaritmos neperianos o integrales del tipo $\int \frac{dt}{t^n}$. Nos faltará entonces por ver como se descomponen la parte correspondiente a las raíces complejas simples. Lo mejor es verlo con un ejemplo directamente (veremos que la parte "nueva" que se incluye en este tercer caso, nos dará lugar a dos primitivas, que serán un logaritmo neperiano y un arcotangente):

Example *Si queremos calcular*

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}dx$$

observamos que el denominador se descompone en la forma

$$x^3-3x^2+7x-5 = (x-1)(x^2-2x+5)$$

de manera que tenemos una raíz real simple y dos raíces complejas conjugadas.

Por tanto,consideraremos la descomposición

$$\frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$

que resulta ser (una vez calculados los coeficientes)

$$\frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{5}{x-1} + \frac{3x+19}{x^2-2x+5}$$

de manera que

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}dx = \int \frac{5}{x-1}dx + \int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}dx$$

Como la primera de estas integrales es inmediata, veremos como obtenemos la segunda (que siempre será un polinomio de 1er grado en el numerador, y un polinomio de 2º grado en el denominador, y que tiene raíces complejas); como vemos a continuación, esta segunda integral nos va a dar lugar a otras dos integrales (una de tipo logaritmo y otra de tipo arcotangente):

En primer lugar, hemos de conseguir que en el numerador aparezca la derivada del denominador $\pm cte$:

$$\int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}dx = 3\int \frac{x+\frac{19}{3}}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2\frac{19}{3}}{x^2-2x+5}dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2+2+2\frac{19}{3}}{x^2-2x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-2)+\frac{44}{3}}{x^2-2x+5}dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x-2)}{x^2-2x+5}dx + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{44}{3}}{x^2-2x+5}dx$$

(hemos sacado el 3 *factor común y hemos multiplicado y dividido por* 2 *para que en el numerador nos aparezca* $2x$ *-que es como comienza la derivada del denominador-; con posterioridad hemos restado y sumado* 2 *para que así, en el*

primer paréntesis aparezca exactamente la derivada del denominador)

Como en la primera de las nuevas integrales en el numerador está la derivada del denominador, la misma es inmediata (y su valor es $\log(x^2 - 2x + 5)$*). Veamos entonces como resolver la segunda de ellas (nos centramos solo en la primitiva, dejando de lado las constantes de integración que aparecen multiplicando): Para su cálculo, hacemos lo siguiente*

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$$

es decir, hemos "completado cuadrados" en el polinomio del denominador, de manera que observamos que se obtiene una integral tipo arcotangente, que podemos resolver sin problemas. En este caso, hemos completado cuadrados a "ojo", aunque esto mismo se puede hacer utilizando una fórmula: Para el caso en que un polinomio de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$ *tenga a* $\alpha \pm \beta i$ *por raíces complejas, se verifica la expresión*

$$ax^2 + bx + c = a\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)$$

Caso IV: $Q(x) = 0$ tiene raíces complejas múltiples.

Observamos que, con la introducción de cada uno de los nuevos casos, nos han ido apareciendo nuevos tipos de integrales (más o menos inmediatas). La forma en la que vamos a resolver este último caso, será un poco diferente de los anteriores, aunque tendrá la ventaja de que no aparecerá ningún nuevo tipo de primitivas, sino que las mismas siempre serán de cualquiera de los tipos ya establecidos. Además, este método no solo será válido cuando haya raíces complejas múltiples, sino que también es de aplicación al caso en que solo tengamos raíces reales múltiples. El procedimiento que pasamos a explicar se conoce como **Método de Hermite**.

Método de Hermite.

Hemos de seguir el siguiente esquema:

- Las raíces simples, ya sean reales o complejas, se descomponen como hemos visto hasta ahora.
- Las raíces múltiples, ya sean reales o complejas, se descomponen como si fuesen simples.
- A la descomposición realizada hasta ahora se le añade un último término (**término de Hermite**), que es la derivada de una fracción. En ésta, primero se escribe el denominador, que está formado por todas las raíces múltiples (reales y complejas), quitándole a cada una de ellas un grado de multiplicidad. A continuación se escribe el numerador, que está formado por un polinomio completo de coeficientes indeterminados, y de un grado menor que el polinomio del denominador. Para poder calcular todos los coeficientes indeterminados que aparecen, primero calcularemos la derivada de esta última fracción, para a continuación sumar todas las fracciones y poder determinar todos los coeficientes que aparecen.

Example *A modo de ejemplo ilustrativo, planteamos la siguiente descomposición para el cálculo de la siguiente integral*

$$\int \frac{dx}{(x-1)x^2(x^2+2)(x^2+x+2)^3}$$

Según lo explicado anteriormente, corresponde realizar la siguiente descomposición

$$\frac{1}{(x-1)x^2(x^2+2)(x^2+x+2)^3} = \underbrace{\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}}_{\text{raíces simples}} + \underbrace{\frac{D}{x} + \frac{Ex+F}{x^2+x+2}}_{\text{raíces múltiples}}$$

$$+\overbrace{\frac{d}{dx}\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x(x^2+x+2)^2}}^{t^o \text{ de Hermite}}$$

A continuación calcularemos la derivada de esta última fracción y la misma la sumaremos a las 4 fracciones anteriores. Al final obtenemos una única fracción, que igualamos a la fracción inicial, lo que nos permitirá obtener todos los coeficientes necesarios.

Una vez obtenidos todos los coeficientes, se verificará

$$\int \frac{dx}{(x-1)x^2(x^2+2)(x^2+x+2)^3} =$$

$$= \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+2}dx + \int \frac{D}{x}dx + \int \frac{Ex+F}{x^2+x+2}dx +$$

$$+ \int \left(\frac{d}{dx}\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x(x^2+x+2)^2} \right)dx$$

donde las integrales 1ª y 3ª son inmediatas (son de tipo log*) y las integrales 2ª y 4ª tendremos que descomponerlas en dos (una de tipo* log *y otra de tipo* arctan*). Por tanto, solo nos falta por calcular la última de las integrales (la del término de Hermite), pero resulta que ésta es inmediata de calcular, puesto que se verifica que*

$$\int \left(\frac{d}{dx}\frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x(x^2+x+2)^2} \right)dx = \frac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{x(x^2+x+2)^2}$$

(ya que se trata de calcular la integral de una derivada).

Remark *Notemos que este procedimiento suele ser muy largo, desde el punto de vista de que hay que calcular muchos coeficientes; pero la ventaja que tiene es que no aparecen nuevas integrales a calcular, sino que todas ellas ya son de tipos que sabemos resolver.*

Integración de funciones de tipo trigonométrico.

Son integrales de la forma

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

siendo R una función racional.

Estas integrales se reducen a integrales de cocientes de polinomios, sin más que hacer el cambio de variable (**sustitución general**) dado por

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

A partir de este cambio, se deducen las relaciones

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Example *Si realizamos la sustitución general para resolver las primitivas siguientes*

$$a)\ \int \frac{dx}{1+2\sin(x)} \qquad b)\ \int \frac{dx}{1+2\cos(x)}$$

obtendremos, respectivamente

$$a)\ \int \frac{dx}{1+2\sin(x)} = \ldots = \int \frac{2dt}{t^2+4t+1}$$

$$b)\ \int \frac{dx}{1+2\cos(x)} = \ldots = \int \frac{2dt}{3-t^2}$$

siendo las nuevas integrales cocientes de polinomios, y que podremos resolver según lo establecido en la sección anterior.

Remark *(Casos particulares) Cuando la función integrando cumple unas condiciones particulares, en lugar de realizar la sustitución general, podemos realizar otros cambios particulares, que tienen la ventaja de que la nueva primitiva en la nueva variable suele ser más sencilla que la que se obtiene a través de la sustitución general (aunque esta sustitución general siempre puede aplicarse a estos casos particulares):*

- El integrando $R(\sin x, \cos x)$ *es* ***par*** *en* $\sin$ *y* $\cos$ *(es decir, se cumple que* $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$*): En este caso es más sencillo realiza el cambio*

$$t = \tan x$$

deduciéndose que

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2};\ \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Por ejemplo, si queremos calcular

$$\int \frac{\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}dx$$

observamos que el integrando es par en $\sin$ *y* $\cos$ *(ya que* $R(-\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos(x))^2}{1+(\sin(x))^2} = \frac{\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)} = R(\sin x, \cos x)$*), por lo que si realizamos el cambio* $t = \tan x$*, obtendremos*

$$\int \frac{\cos^2(x)}{1+\sin^2(x)}dx = \ldots = \int \frac{dt}{(2t^2+1)(t^2+1)}$$

que es un cociente de polinomios.

- El integrando $R(\sin x, \cos x)$ *es* ***impar*** *en* $\cos$ *(es decir, se cumple que* $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$*): En este caso es más sencillo realiza el cambio*

$$t = \sin x$$

deduciéndose que

$$\cos(x) = \sqrt{1-t^2};\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Por ejemplo, si queremos calcular

$$\int \frac{\sin(x)}{1++\cos(x)+\cos^2(x)}dx$$

observamos que el integrando es impar en sin *ya que*

$$R(-\sin x,\cos x) = \frac{-\sin(x)}{1++\cos(x)+\cos^2(x)} = -\frac{\sin(x)}{1++\cos(x)+\cos^2(x)} = -R(\sin x,\cos x)$$

por lo que si realizamos el cambio $t = \cos x$*, obtendremos*

$$\int \frac{\sin(x)}{1++\cos(x)+\cos^2(x)}dx = \ldots = -\int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

que es un cociente de polinomios.

- El integrando $R(\sin x,\cos x)$ *es* ***impar*** *en* sin *(es decir, se cumple que* $R(-\sin x,\cos x) = -R(\sin x,\cos x)$*): En este caso es más sencillo realiza el cambio*

$$t = \cos x$$

deduciéndose que

$$\sin(x) = \sqrt{1-t^2}\ ;\ dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

- Si el integrando es de la forma $R(\sin x,\cos x) = \sin^m(x)\cos^n(x)$*, se puede recurrir a alguno de los casos particulares anteriores, o bien utilizar las relaciones trigonométricas*

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

que nos permiten obtener la integral inicial como una suma de integrales inmediatas.

Por ejemplo, si queremos resolver

$$\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx$$

podemos utilizar que el integrando es impar en sin *(comprobarlo) y resolverla a través de la sustitución que se puede realizar en este caso particular, o bien tener en cuenta que*

$$\sin^3(x)\cos^2(x) = \underbrace{\sin(x)\sin(x)}\underbrace{\sin(x)\cos(x)}\cos(x) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(x-x)-\cos(x+x))\frac{1}{2}(\sin(x+x)+\sin(x-x))\cos(x) =$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2x)\cos(x)} - \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2x)\cos(2x)}\cos(x) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{2}(\sin(2x+x)+\sin(2x-x)) - \frac{1}{4}\frac{1}{2}(\sin(2x+2x)+\sin(2x-2x))\cos(x) =$$

$$= \frac{1}{8}(\sin(3x)+\sin(x)) - \frac{1}{8}\underbrace{\sin(4x)\cos(x)} - \frac{1}{8}\cos(x) =$$

$$= \frac{1}{8}(\sin(3x)+\sin(x)) - \frac{1}{8}\frac{1}{2}(\sin(4x+x)+\sin(4x-x)) - \frac{1}{8}\cos(x) =$$

$$= \frac{1}{8}(\sin(3x)+\sin(x)) - \frac{1}{16}(\sin(5x)+\sin(3x)) - \frac{1}{8}\cos(x)$$

por lo que la integral inicial se descompone como suma de integrales inmediatas.

Integración de algunas funciones irracionales.

Dentro de esta sección se pueden incluir multitud de casos, la mayoría de los cuales se pueden reducir a integrales de funciones racionales, a través de cambios de variables más o menos complicados. Muchos de estos cambios se pueden ver en el Anexo 1.2.1 (incluido en el Aula Virtual), y muchos más pueden verse en cualquier libro que incluya Cálculo de Primitivas (por ejemplo, en *F. Coquillat: Cálculo Integral. Metodología y Problemas. Ed. Tebar*).

En estos apuntes solamente vamos a comentar algunos casos particulares de este tipo de funciones irracionales, y que solemos encontrar habitualmente en la práctica:

Integrales de la forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}\right)dx$.

En este caso suele ser aconsejable realizar el cambio

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Example *Resolver las integrales siguientes:*

$$a)\ \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \qquad b)\ \int \sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$$

(en el caso (a) realizar el cambio $t^2 = x$, mientras que en (b) realizar $t^2 = \frac{x}{1+x}$; a continuación, despejar x, obtener dx y realizar la sustitución; obtendremos integrales (en variable t) de cocientes de polinomios).

Integrales de la forma $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$.

Completando cuadrados en el radical, siempre obtendremos una de las 3 integrales siguientes:

$\int \sqrt{k^2-x^2}\,dx$	Podemos resolverla a través del cambio $x = a\sin(t)$
$\int \sqrt{k^2+x^2}\,dx$	Podemos resolverla a través del cambio $x = a\sinh(t)$
$\int \sqrt{x^2-k^2}\,dx$	Podemos resolverla a través del cambio $x = a\cosh(t)$

Example *Si queremos resolver*

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$$

realizaremos el cambio

$$x = 2\sin(t)$$

de donde

$$dx = 2\cos(t)dt$$

de manera que

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(2\sin(t))^2}\,2\cos(t)dt = 4\int \cos^2(t)dt =$$

$$= 4\int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = 2\int dt + 2\int \cos(2t)dt = 2t + \sin(2t) + K$$

y sólo hemos de deshacer el cambio de variable.

(Observamos que hemos utilizado la conocida igualdad trigonométrica $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$*; de forma análoga, también recordamos la igualdad* $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$*, que es posible que haya que utilizar en alguna ocasión).*

Example *Para resolver*

$$\int \sqrt{1+x-x^2}\,dx$$

tendremos en cuenta que

$$\int \sqrt{1+x-x^2}\,dx = \int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

que resolveremos mediante el cambio

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(t)$$

y actuaremos como en el ejemplo anterior.

Example *(1er Parcial, febrero 2017) Para resolver*

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$$

completaremos cuadrados, resultando

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$

por lo que efectuaremos el cambio de variable $x-1 = 2\sin t$ *:*

De esta forma

$$\int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\sin^2(t)}\;2\cos(t)\,dt = 4\int \cos^2(t)\,dt =$$

$$= 4\int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = 2t + \sin(2t) + cte$$

es decir

$$\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx = 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) + cte$$

Integrales de la forma $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Completando cuadrados en el radical, siempre obtendremos una de las 3 integrales siguientes:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} \qquad \text{Que es inmediata (es de tipo } \arcsin)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 + x^2}} \qquad \text{Que es inmediata (es de tipo } \operatorname{argsinh})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k^2}} \qquad \text{Que es inmediata (es de tipo } \operatorname{argcosh})$$

Example *Resolver*

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}} \qquad b) \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} \qquad c) \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$.

Ver Anexo 1.2.1, a partir de la página 358.

Ejercicios resueltos.

1. *(1er Parcial, febrero 2012)* Calcular las siguientes integrales

$$(1.a) \int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x} \qquad (1.b) \int \frac{5}{x^2 + 6x + 10} dx$$

Solución:

(1.a) Haremos la sustitución general $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. De esta forma sabemos que $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Entonces

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2 + 2t} = \int \frac{dt}{1 + t} =$$

$$= \log(1 + t) + cte = \log\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + cte$$

(1.b) El polinomio $x^2 + 6x + 10 = 0$ solo tiene raíces complejas conjugadas, por lo que esta integral dará lugar a un $\arctan(\quad)$ una vez que completemos cuadrados en el denominador. Así, se tiene

$$\int \frac{5}{x^2 + 6x + 10} dx = \int \frac{5}{(x + 3)^2 + 1} dx = 5 \arctan(x + 3) + cte$$

2. *(Final, junio 2013)* Calcular

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6 + 5x - x^2}}$$

Solución:

Si completamos cuadrados en el denominador, tendremos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6 + 5x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}} = \frac{2}{7} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}\right)^2}}$$

por lo que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6+5x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}\right) + cte$$

3. *(1er Parcial, febrero 2015)* Calcular

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Solución: Se trata de un cociente de polinomios, con cte en numerador y raíces complejas en denominador. Por tanto, esta integral es inmediata sin más que completar cuadrados en el denominador (tipo arco tangente):

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1) + cte$$

4. *(1er Parcial, febrero 2016)*

a) Haciendo la sustitución $x = 2\tan(t)$, calcular

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

b) Calcular

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$$

Solución:

(4.a) Si hacemos $x = 2\tan(t)$, tendremos

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2(1+\tan^2(t))}{4\tan^2(t)\sqrt{4\tan^2(t)+4}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{1+\tan^2(t)}}{\tan^2(t)}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{1+\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}}{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{\frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}}{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin(t)} + cte = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + cte$$

donde se ha deshecho el cambio de variable (de $x = 2\tan(t)$ resulta que $\sin(t) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$).

(4.b) Se trata de una integral racional, donde el denominador solo tiene raíces complejas simples. Al ser el numerador una cte, la resolveremos sin más que completar cuadrados en el denominador:

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{7/4}+1} = \frac{4}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{7}/2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{4}{7}\frac{\sqrt{7}}{2}\arctan\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{7}/2} + cte$$

Ejercicios propuestos.

Ver ejercicios en Tema 1.2.4. Ver Ejercicios primitivas_1.pdf y Ejercicios primitivas_2.pdf, incluidos en Aula Virtual.