Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 1.1.4: SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS REALES

PROGRAMA DETALLADO:

- **Sucesiones de números reales**:
- Definiciones y propiedades.
- Operaciones con límites.
- Cálculo de límites indeterminados.
- **Series de números reales**:
- Definiciones y propiedades.
- Series de términos positivos.
- Series de términos cualesquiera.
- **Ejercicios propuestos**.

El objetivo de este tema será estudiar las sucesiones de números reales desde una doble perspectiva: por un lado, calcular el límite de una sucesión (si existe, éste será el valor al que se "aproximan cada vez más" los términos de la misma conforme los vamos representando todos en una recta real), cosa que haremos en la primera sección; y, por otro lado, intentar conocer lo que vale la suma de sus infinitos términos (que será a lo que llamaremos **serie numérica**, como veremos en la segunda sección del tema).

Sucesiones de números reales.

Esta sección se encuentra desarrollada en su totalidad en el fichero ANEXO1.1.4-completo_Fich1.pdf incluido en el Aula Virtual. Nosotros, en este resumen, nos limitaremos a destacar los aspectos más importantes relacionados con las sucesiones de números reales.

Definiciones y propiedades.

Definition *Se llama **sucesión de números reales** a toda colección infinita y ordenada de elementos de $\mathbb{R}$, es decir, atoda colección de elementos*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ con } a_i \in \mathbb{R}$$

*Normalmente, consideraremos sucesiones cuyos elementos verifican una determinada relación (un determinado patrón) dependiente de un número natural n, de manera que a dicha sucesión la representaremos por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente por (a_n). El término a_n se denomina **término general** de la sucesión.*

Example *Varios.*

Definition *Una sucesión de números reales (a_n) **tiene por límite** el número real a si cuando vamos representando los infinitos términos de esta sucesión en una recta real, los* *mismos, a partir de uno determinado, cada vez se van acercando hacia el valor de* a. *Formalmente, esto significa que*

Para todo $\varepsilon > 0$, *existe un número natural* n_0, *tal que si* $n > n_0$, *entonces* $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

ó lo que es lo mismo

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ si\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Definition *Cuando una sucesión tiene límite el número a, se dice que la sucesión es* ***convergente*** *al número* a, *y se representará por*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

o simplemente por

$$\lim a_n = a$$

Por tanto, cuando una sucesión no tiene por límite un número, se dirá que es ***no convergente****; dentro de este tipo de sucesiones, suele distinguirse entre las sucesiones* ***divergentes*** *(serán las que tienen límite infinito y que no están acotadas) y las sucesiones* ***oscilantes*** *(no tienen límite finito ni infinito, aun pudiento estar acotadas).*

Definition *Una sucesión se dice que tiene límite* $+\infty$ *(y que, por tanto, es divergente) si*

$$\forall K > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ si\ n > n_0 \Rightarrow a_n > K$$

Análogamente, una sucesión se dice que tiene límite $-\infty$ *(y que, por tanto, es divergente) si*

$$\forall K > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ si\ n > n_0 \Rightarrow a_n < -K$$

Entre las propiedades de las sucesiones de números reales convergentes, podemos destacar:

Proposition *Para una sucesión* (a_n) *de números reales, se tiene:*

a) Si (a_n) *es convergente, entonces su límite es único.*

b) Si (a_n) *es convergente, entonces* (a_n) *está acotada.*

c) Si (a_n) *es convergente, entonces cualquier subsucesión extraída de ella también es convergente y su límite es el mismo.*

d) Si (b_n) *y* (c_n) *son otras sucesiones tales que verifican* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *y resulta que* $\lim a_n = a = \lim c_n$, *entonces* $\lim b_n = a$.

e) Si (a_n) *es creciente (resp. decreciente) y acotada superiormente (resp. inferiormente), entonces* (a_n) *es convergente.*

f) Si $a_n < b_n$, *entonces* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Operaciones con límites.

Proposition *(Operaciones con límites finitos) Sean* (a_n) *y* (b_n) *dos sucesiones con límites respectivos* a *y* b. *Entonces:*

a) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim(a_n) \pm \lim(b_n) = a \pm b$.

b) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = a \cdot b$.

c) Si $b \neq 0$, $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{a}{b}$.

d) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim(\lambda a_n) = \lambda \lim(a_n) = \lambda a$.

e) Si $k > 0$, $\lim k^{a_n} = k^{\lim(a_n)} = k^a$.

f) Si $a > 0$, $\lim(\log a_n) = \log(\lim(a_n)) = \log(a)$.

g) Si $a > 0$, $\lim(a_n)^{b_n} = (\lim(a_n))^{\lim(b_n)} = a^b$.

Proposition *(Operaciones con límites infinitos) Se verifican:*

a) Si $\lim(a_n) = +\infty$ *y* $\lim(b_n) = +\infty$ *ó es finito, entonces* $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.

b) Si $\lim(a_n) = +\infty$ *y* $\lim(b_n) = +\infty$ *ó es constante positiva, entonces* $\lim(a_n \cdot b_n) = +\infty$.

c) Si $\lim(a_n) = +\infty$ *y* $\lim(b_n)$ *es finito, entonces* $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

d) Si $\lim(a_n) = 0$ *y* $\lim(b_n) = \pm\infty$ *ó es constante, entonces* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Remark *De los casos anteriores se han omitido las operaciones que dan lugar a expresiones de la forma* $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$ *y* $\frac{0}{0}$, *que, como sabemos, dan lugar a indeterminaciones (es decir, son expresiones de las que, a priori, no podemos saber lo que va a dar el resultado de su límite, sino que tendremos que hacer las correspondientes operaciones para calcularlo; tendremos que "resolver la indeterminación").*

Puesto que además se verifica

$$\lim(a_n)^{b_n} = \exp(\lim(b_n \log(a_n)))$$

también son indeterminaciones las expresiones 1^∞, ∞^0 *y* 0^0.

Cálculo de límites indeterminados.

Límites de expresiones racionales.

Aquí recordaremos como calcular límites de expresiones racionales, es decir, límites de la forma $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$, siendo P y Q polinomios de variable n y de un grado determinado.

Límites de expresiones irracionales.

Aquí recordaremos como calcular límites de algunas expresiones irracionales, como por ejemplo

$$\lim\left(\sqrt{2n^2 - 5} - 3n\right)$$

El número e.

Recordamos que se tiene la siguiente expresión

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

o lo que es equivalente

$$\lim\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

siendo (a_n) cualquier sucesión con $\lim(a_n)=+\infty$.

Infinitésimos e infinitos. Equivalencias.

Lo mismo que hemos visto en el Tema 1.1.1 sobre infinitésimos e infinitos equivalentes para el cálculo de límites de funciones, es válido para el caso de infinitésimos e infinitos equivalentes para calcular límites de sucesiones. Aquí, sólo destacamos lo fundamental para poder aplicarlos en la práctica:

Definition *Se llama* ***infinitésimo*** *a toda sucesión* (a_n) *tal que* $\lim(a_n)=0$. *Se llama* ***infinito*** *a toda sucesión* (a_n) *tal que* $\lim(a_n)=\infty$.

Proposition *El producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo.*

Example *Calcular*

$$\lim\frac{\sin(n)}{n}$$

Definition *Dos infinitésimos (o infinitos)* (a_n) *y* (b_n) *son equivalentes si* $\lim\frac{a_n}{b_n}=1$. *En tal caso, se indicará por* $a_n\sim b_n$.

Remark *A continuación mostramos los infinitésimos e infinitos equivalentes más usuales. Notemos la similitud existente entre los infinitésimos de sucesiones y de funciones.*

(Tabla de infinitésimos equivalentes)

- $\log(1+a_n)\sim a_n$ *(si* $\lim a_n=0$*)*
- $\log(a_n)\sim a_n-1$ *(si* $\lim a_n=1$*)*
- $\sin a_n\sim a_n$ *(si* $\lim a_n=0$*)*
- $\tan a_n\sim a_n$ *(si* $\lim a_n=0$*)*
- $\arcsin a_n\sim a_n$ *(si* $\lim a_n=0$*)*
- $\arctan a_n\sim a_n$ *(si* $\lim a_n=0$*)*
- $1-\cos a_n\sim\frac{a_n^2}{2}$ *(si* $\lim a_n=0$*)*
- $e^{a_n}-1\sim a_n$ *(si* $\lim a_n=0$*)*
- $k^{a_n}-1\sim a_n\log k$ *(si* $\lim a_n=0$*)*
- $(1+a_n)^{\alpha}-1\sim\alpha a_n$ *(si* $\lim a_n=0$*)*

(Tabla de infinitos equivalentes)

- $a_0n^p+a_1n^{p-1}+....+a_p\sim a_0n^p$.
- $\log(a_0n^p+a_1n^{p-1}+....+a_p)\sim\log n^p$.
- $\log\varphi(n)\sim\log n^p$, *siendo* $\varphi(n)$ *una función racional de grado* $p\neq 0$.
- $n!\sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$ *(Fórmula de Stirling).*

Proposition *(Principio de sustitución) Todo infinitésimo (o infinito) que sea* ***factor o divisor*** *en un límite, puede sustituirse por su equivalente sin que se altere el valor de dicho límite.*

Remark *Nuevamente, este Principio nos permite establecer una fórmula para resolver indeterminaciones de la forma* 1^∞*, puesto que se verifica, solo para el caso* 1^∞*,*

$$\lim(a_n)^{b_n} = \exp(\lim(b_n \log(a_n))) = e^{\lim(b_n(a_n-1))}$$

El Criterio de Stolz.

Este Criterio es el "equivalente" a la regla de L'Hôpital para resolver límites indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$, y se puede aplicar siempre que se cumplan determinadas condiciones:

Proposition *(Criterio de Stolz) Si* (b_n) *es sucesión creciente y divergente, y si la expresión* $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ *tiene límite finito o infinito de signo determinado, entonces se verifica*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

Este criterio también es de aplicación en el caso en que $\lim a_n = \lim b_n = 0$*, siendo* (b_n) *es decreciente.*

Example *Calcular los siguientes límites de sucesiones:*

$$a)\ \lim \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} \qquad b)\ \lim \sqrt[n]{n}$$

Series de números reales.

El objetivo de esta última sección del tema es estudiar, e intentar obtener, lo que vale la suma de los infinitos términos de una sucesión de números reales (a_n). Este objetivo podremos conseguirlo de manera exacta en unas pocas ocasiones (por ejemplo, en el caso de las series geométricas, series aritmético-geométricas, series telescópicas, etc, como puede verse en el ANEXO1.1.4-completo_Fich2.pdf incluido en el Aula Virtual), aunque en la mayoría de las veces nos tendremos que conformar con saber si esta suma infinita va a dar un resultado finito (en este caso se dice que la serie es *convergente*), aunque no sepamos exactamente cual será el mismo (normalmente, cuando ésto ocurre se suele dar una aproximación al valor de la suma) o la suma va a dar infinito (se dice que la serie es *divergente*).

Todo esta sección está desarrollada con todo detalle en el fichero anexo al que ya hemos hecho referencia. Nosotros nos limitaremos a dar unas breves pinceladas sobre estas sumas infinitas (series) ya que, y como veremos con posterioridad, una integral definida no va a ser sino una suma de infinitos números reales, es decir, una serie numérica. En general, siempre que veamos una expresión de la forma

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\quad)$$

donde en ( ) irá el término general de cualquier sucesión numérica, y aunque no seamos consciente de ello, en realidad lo que tenemos es una serie numérica.

Definition *Dada una sucesión de números reales* (a_n), *a partir de la misma se considera una nueva sucesión* (S_n), *cuyos términos vienen dados por*

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

A esta nueva sucesión así construída se le llama ***serie de números reales*** *de término general* a_n, *y a la misma se le denota por*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \text{ ó por } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ó simplemente por } \sum a_n$$

Definition *Se dice que la serie* $\sum a_n$ *es* ***convergente*** *si existe y es finito el* $\lim(S_n)$, *es decir, si existe y es finito*

$$\lim(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

y a su valor se le llama ***suma*** *de la serie.*

De igual forma, si $\lim(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \pm\infty$, *se dice que la serie es* ***divergente***, *mientras que si no existe* $\lim(S_n)$, *se dice que la serie es* ***oscilante*** *o* ***no sumable***.

Remark *Es decir, calcular la suma de una serie de término general* a_n *no es sino calcular el siguiente límite*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim(S_n) = \lim(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

y aquí viene el problema, ya que salvo en casos muy particulares (el caso de la serie geométrica es el más típico y sencillo) calcular este límite será imposible y, en la mayoría de los casos nos tendremos que conformar con dar unos resultados (llamados ***criterios de convergencia****) que nos asegurarán que, bajo determinadas condiciones (normalmente relacionadas con la sucesión* (a_n)*) la serie será convergente (aunque no sepamos cual va a ser su suma, sí que sabremos que ésta será una cantidad finita) o será divergente.*

Example *(Serie geométrica) Vamos a calcular la suma de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots$$

Para ello, usaremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \lim\left(\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{\text{suma de n términos}}\right)$$

y éste límite se puede calcular ya que está formado por la suma de n términos de una progresión geométrica (de razón $r = \frac{1}{3}$*), resultando ser*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \lim \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{0 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2}$$

(Hemos utilizado una fórmula conocida: Que si (a_n) es una progresión geométrica de razón r, la suma de sus n primeros términos viene dada por $S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$)

Remark *En general, y como puede verse en el Anexo referenciado de este tema, puede probarse que cualquier Serie Geométrica es convergente siempre que la razón de la progresión sea $|r| < 1$, y que la suma de la misma viene dada por*

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Example *(Serie armónica) Se verifica que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

es divergente.

Proposition *(Propiedades generales de las series numéricas) Verlas en ANEXO1.1.4-completo_Fich2.pdf incluido en el Aula Virtual.*

Proposition *(Operaciones con series numéricas) Verlas en ANEXO1.1.4-completo_Fich2.pdf incluido en el Aula Virtual.*

Series de términos positivos.

Aquí se pueden destacar algunos criterios que nos permiten establecer cuando una serie de términos positivos es convergente o divergente, aunque no se pueda establecer lo que vale la suma de la serie (caso de ser convergente). Entre éstos, podemos destacar: Criterio de la raíz, Criterio del cociente, Series asintóticamente proporcionales, ... como puede verse en ANEXO1.1.4-completo_Fich2.pdf.

Series de términos cualesquiera.

Es de destacar el Criterio de Leibnitz, válido para series alternadas, como puede verse en ANEXO1.1.4-completo_Fich2.pdf.

Ejercicios propuestos.

Pueden verse en ANEXO1.1.4-completo_Fich2.pdf (tanto para sucesiones como para series de números reales).