Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 1.1.3: FÓRMULA DE TAYLOR EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

PROGRAMA DETALLADO:

- **Introducción**.
- **Fórmula de Taylor**. **Ejemplos**.
- Expresión del resto $R_{n,a}(x)$.
- **Fórmula de McLaurin de algunas funciones elementales**.
- **Aplicaciones de la fórmula de Taylor en una variable**.
- Cálculo aproximado de expresiones numéricas.
- Aplicación a la determinación de extremos relativos.
- Desarrollos limitados. Aplicación al cálculo de límites indeterminados.
- **Ejercicios resueltos**.
- **Ejercicios propuestos**.

Introducción.

Las funciones elementales más usuales ($\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x), \ldots$) presentan grandes inconvenientes cuando intentamos calcular el valor numérico que alcanzan en determinados puntos (pensar, por ejemplo, los problemas que tendríamos si queremos calcular -sin ayuda de calculadora- valores como $\sin(0.5)$, $\cos\left(\frac{1}{4}\right)$, $\log(2), \ldots$). No ocurre ésto cuando se trata de calcular en dichos puntos los valores que toman las funciones polinómicas, $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, ya que las operaciones a realizar son simplemente sumas y productos de números.

Por tal motivo, tendrá especial interés obtener expresiones que nos permitan aproximar éstas u otras funciones elementales mediante polinomios.

Como es natural, cuando realicemos una aproximación, será preciso obtener estimaciones del error que cometemos.

De todo ésto, es lo que hablaremos en el presente tema.

Una primera aproximación al cálculo de los valores de una función en un punto se obtiene a partir del teorema de Lagrange, establecido en el tema anterior: Si $f(x)$ es derivable en un entorno del punto a, tendremos, aplicando este teorema en el intervalo (a,x), que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(c)$$

siendo $c \in (a,x)$. De esta forma, si el intervalo (a,x) fuese lo suficientemente pequeño (es decir, si x está lo suficientemente próximo al punto a), podríamos aproximar $f'(c)$ por $f'(a)$, por lo que tendríamos en este caso que

$$f(x) \simeq f(a) + (x-a)f'(a)$$

es decir, aproximamos la función $f(x)$ por un polinomio de 1er grado, aunque esta aproximación será más o menos buena según sea la separación entre los puntos x y a. Notemos que, bajo esta suposición, lo que estamos haciendo es aproximar, en las proximidades del punto a, el valor que toma f en un punto x, por el valor que toma la recta tangente en el punto a.

Lo que veremos en este tema es lo que ocurre cuando en lugar de aproximar una función por un polinomio de 1er grado (que es una recta), la aproximamos por polinomios de grado superior, y veremos, en cada caso, como se puede acotar el error que se comete.

Fórmula de Taylor. Ejemplos.

Definition *Sea $f(x)$ una función que admite derivadas hasta el orden n en el punto a. Se llama* ***polinomio de Taylor*** *de grado n para la función f en el punto a, al polinomio siguiente*

$$P_{n,f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

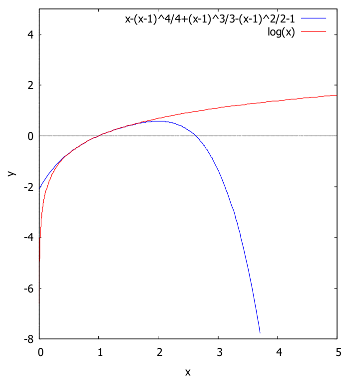
Example *Para calcular el polinomio de Taylor de grado 4 en el punto $a = 1$ para la función $f(x) = \log(x)$, aplicaremos la fórmula*

$$P_{4,f,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

y si efectuamos los cálculos, resulta ser

$$P_{4,f,1}(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-6}{4!}(x-1)^4$$

Remark *El polinomio de Taylor coincide con la función $f(x)$ en el punto a, aunque, en general, no coincidirán ambos en todo el dominio de $f(x)$. En el ejemplo anterior observamos que el polinomio obtenido y la función coinciden en el punto 1, aunque en cuaquier otro punto diferente de 1 cada uno toma valores distintos:*



Por tal motivo,tiene sentido considerar la diferencia entre la función f y su polinomio de Taylor, es decir, una nueva función, que viene dada por

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,f,a}(x)$$

y a la que llamamos ***Resto*** *o* ***Término Complementario*** *de orden n de f en a.*

Observamos que esta nueva función verifica que vale 0 si $x = a$, aunque, en *general, será no nula.*

Es evidente que cuanto mejor conozcamos esta nueva función $R_{n,a}(x)$, mejor conoceremos la aproximación que existe entre $f(x)$ y su polinomio de Taylor $P_{n,f,a}(x)$. El siguiente resultado nos da información sobre esta aproximación:

Proposition *Si f es derivable hasta el orden $n-1$ en un entorno del punto a y existe $f^{(n)}(a)$, entonces se verifica que*

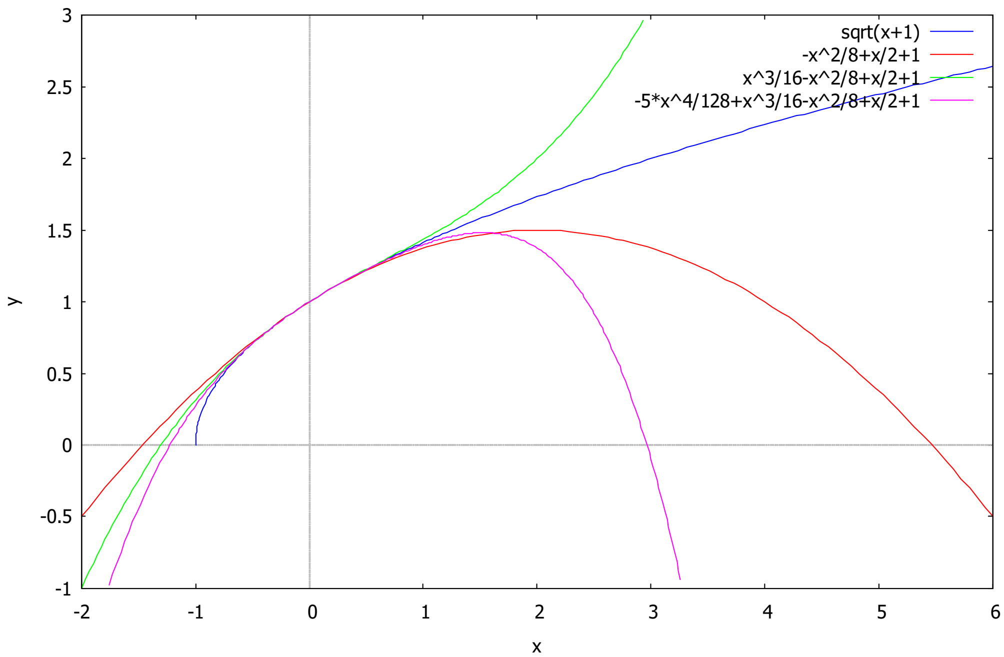
$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Remark *Cuando se verifica lo anterior, se dice que $R_{n,a}(x)$ es un* ***infinitésimo de orden superior*** *a n en el punto a, y se suele representar*

$$R_{n,a}(x) \equiv o((x-a)^n)$$

Remark *Conclusión inmediata de esta última proposición es que $R_{n,a}(x)$ se aproxima a cero (ó lo que es lo mismo, el polinomio de Taylor aproxima mejor a la función) no sólo cuanto más cerca estemos del punto a, sino también cuanto mayor sea el grado del polinomio.*

Example *En la siguiente gráfica vemos la representación de los polinomios de McLaurin de grados 2, 3 y 4 para la función $f(x) = \sqrt{x+1}$, donde se observa que cuando el polinomio es de grado mayor, es mejor la aproximación entre el polinomio respectivo y la función $f(x)$, es decir, cada vez el mayor los valores de x para los que hay coincidencia entre ellos.*



Definition *A la expresión*

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

es decir a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x)$$

se le llama ***fórmula de Taylor*** *de orden n para la función f en el punto a.*

En el caso particular en que $a = 0$, a la fórmula de Taylor se le conoce como ***fórmula de McLaurin***

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n,0}(x)$$

Expresión del resto $R_{n,a}(x)$.

Con el objetivo de profundizar en el estudio de $R_{n,a}(x)$ veremos diferentes formas de expresar este resto:

- Forma infinitesimal: Si denotamos

$$\alpha(x) = \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}$$

tendremos que se verifica

$$R_{n,a}(x) = (x-a)^n\alpha(x), \text{ con } \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$$

A esta forma de expresar el resto se le llama **forma infinitesimal**, y será utilizada posteriormente para el cálculo de límites. Veremos que, en esta forma de expresar el resto, no es importante la forma del mismo, sino que nos interesará como es su comportamiento cuando x tiende al punto a.

- Forma de Lagrange: Se prueba, utilizando el teorema de Cauchy establecido en el tema anterior, que el resto puede expresarse en la forma

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo c un valor comprendido entre a y x. A esta forma se le llama **resto de Lagrange** y, como veremos, será la expresión que habitualmente usaremos cuando queremos hacer aproximaciones numéricas u otras aplicaciones.

Remark *A la expresión*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

se le llama ***fórmula de Taylor con resto de Lagrange****, y es la que se suele utilizar la mayoría de la veces.*

Análogamente, la ***fórmula de McLaurin con resto de Lagrange*** *vendría dada por*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

siendo c un valor comprendido entre 0 y x.

Fórmula de McLaurin de algunas funciones elementales.

En esta sección vamos a establecer la expresión para la fórmula de McLaurin de algunas de las funciones más usuales. Es aconsejable que el alumno se aprenda la expresión de las mismas, ya que de esta forma, podrá aplicarlas de forma directa (como veremos en ejercicios), sin necesidad de tener que establecer la correspondiente fórmula.

Para este objetivo solo hemos de calcular derivadas sucesivas y aplicar la fórmula anterior:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Todas las funciones que aparecen a continuación verifican que es sencillo establecer hasta su derivada de orden n, ya que las sucesivas derivadas siempre cumplen un determinado patrón. La demostración de estas fórmulas las puede realizar el alumno como ejercicio (estableciendo previamente la derivada $n-sima$ de cada una de las funciones) o verlas en el Anexo 1.1.3 incluido en el Aula Virtual. Con posterioridad veremos que es lo que hemos de realizar si nos piden establecer la fórmula de McLaurin para una función de la que no sea sencillo establecer su derivada de orden n.

- Para $f(x) = e^x$ se tiene

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

siendo c un punto entre 0 y x (lo mismo ocurre en el resto de casos).

- Para $f(x) = \log(1+x)$ se tiene

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{(1+c)^{-(n+1)}}{n+1}x^{n+1}$$

- Para $f(x) = \sin(x)$ se tiene

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n,0}(x)$$

siendo

$$R_{2n,0}(x) = \frac{\sin\left(c + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

- Para $f(x) = \cos(x)$ se tiene

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n,0}(x)$$

siendo

$$R_{2n,0}(x) = \frac{\cos\left(c + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

- Para $f(x) = (1+x)^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_{n,0}(x)$$

siendo

$$R_{n,0}(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+c)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}$$

- Para $f(x) = \sinh(x)$ se tiene

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n,0}(x)$$

siendo

$$R_{2n,0}(x) = \frac{\cosh(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

- Para $f(x) = \cosh(x)$ se tiene

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n,0}(x)$$

siendo

$$R_{2n,0}(x) = \frac{\sinh(c)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

- Otros desarrollos de funciones para las que se puede establecer su derivada $n-sima$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + R_{n,0}(x)$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1,0}(x)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1,0}(x)$$

$$\operatorname{argsinh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1,0}(x)$$

$$\operatorname{argtanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1,0}(x)$$

- Otros desarrollos para funciones de los que no es posible establecer su derivada $n-sima$ (por eso damos solo los primeros términos de los mismos):

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + R_{7,0}(x)$$

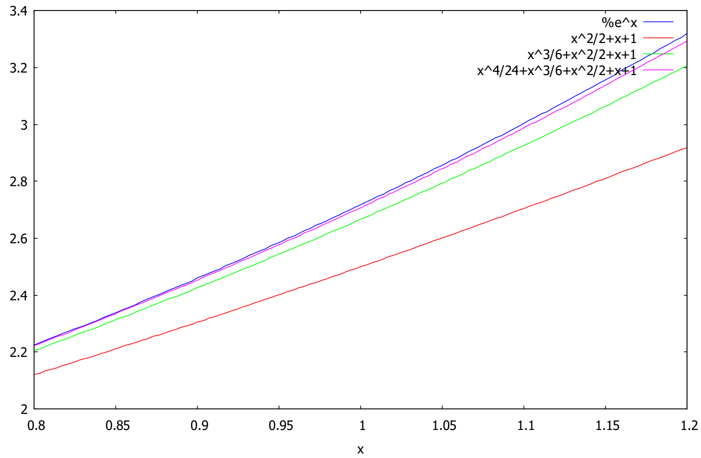
$$\sec(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + R_{6,0}(x)$$

Aplicaciones de la fórmula de Taylor en una variable.

Cálculo aproximado de expresiones numéricas.

Normalmente no siempre será posible sustituir en su dominio una función $f(x)$ por un polinomio. No obstante, esta sustitución sí que será posible cuando se trate de un intervalo cerrado en el que estén acotadas las sucesivas derivadas de $f(x)$. La longitud del intervalo dependerá de la función y, como veremos en ejemplos, una variación de dicha longitud llevará aparejada, en general, una variación del grado del polinomio.

Example *Cálculo aproximado del valor numérico del número e.*



Example *Obtener el valor aproximado de* $\sqrt{50}$ *con error*$< 10^{-3}$:

En primer lugar hemos de decidir que función consideramos y para la que sea fácil obtener su valor y el de sus sucesivas derivadas en un determinado punto a (es decir, tenemos que escoger cual es la función para la que vamos a realizar su desarrollo de Taylor, así como cual es el punto a elegido para realizar su desarrollo); además, tenemos que conseguir que al sustituir en esta función la variable x por un adecuado valor, obtengamos el resultado que queremos calcular, es decir, $\sqrt{50}$.

Inicialmente, podríamos considerar tomar $f(x) = \sqrt{x}$, *desarrollar ésta en un punto a para obtener el polinomio de Taylor, y después sustituir en este polinomio x por* 50 *para aproximar el valor que se pide. Sin embargo, y como suele ser habitual considerar un desarrollo de McLaurin (a* $= 0$*), observamos que es imposible calcular las derivadas de la función* $f(x) = \sqrt{x}$ *en el punto* 0*. Por ésto, vamos a considerar la función* $f(x) = \sqrt{49+x}$, *de la que sí es posible calcular su valor y el de sus sucesivas derivadas en* $a = 0$ *(es decir, podemos obtener su desarrollo de McLaurin hasta el grado que consideremos); con posterioridad, para aproximar el valor de* $\sqrt{50}$ *le daremos a x el valor* $x = 1$ *en esta* $f(x)$, *ya que* $f(1) = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$.

Vamos a aproximar la función $f(x) = \sqrt{49+x}$ *por un polinomio de McLaurin de grado* 2*, y acotaremos su error (este grado* 2 *también lo hemos elegido nosotros, de manera que si al calcular el correspondiente error para este grado, éste fuese menor que* 10^{-3}*, será suficiente con aproximar por un polinomio de grado* 2*; sin embargo, si éste no fuese menor que tal cantidad, deberemos aproximar por un polinomio de grado* 3 *o mayor):*

Como se verifica que

$$f(x) = \sqrt{49+x} \Rightarrow f(0) = 7$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{49+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{14}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(49+x)^3}} \Rightarrow f''(0) = \frac{-1}{4 \cdot 7^3}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(49+x)^5}} \Rightarrow f'''(c) = \frac{3}{8\sqrt{(49+c)^5}}$$

siendo $0 < c < x = 1$, *tendremos que, aplicando*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

resultará

$$f(x) = 7 + \frac{1}{14}x + \frac{\frac{-1}{4 \cdot 7^3}}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{8\sqrt{(49+c)^5}}}{3!}x^3$$

por lo que si aproximamos la función por este polinomio de segundo grado, tendremos

$$f(x) = \sqrt{49+x} \simeq 7 + \frac{1}{14}x + \frac{\frac{-1}{4 \cdot 7^3}}{2!}x^2 \Rightarrow f(1) = \sqrt{49+1} \simeq 7 + \frac{1}{14}1 + \frac{\frac{-1}{4 \cdot 7^3}}{2!}1^2$$

donde el error cometido en esta aproximación viene dado por

$$Error = \left| \frac{\frac{3}{8\sqrt{(49+c)^5}}}{3!}1^3 \right| < \left| \frac{\frac{3}{8\sqrt{(49+0)^5}}}{3!}1^3 \right| = 3.7187 \times 10^{-6} < 10^{-3}$$

(notemos que, en este caso, para acotar el valor del Error, hemos sustituido c por $0 = 0$, *ya que el nuevo resultado obtenido es mayor que el inicial, puesto que c aparece dividiendo en la expresión, y sabemos que* $0 < c < 1$*).*

Como este error ya es menor que la cantidad pedida, será suficiente con aproximar por un polinomio de McLaurin de grado 2.

Por todo esto, obtenemos que

$$\sqrt{50} = \sqrt{49+1} \simeq 7 + \frac{1}{14}1 + \frac{\frac{-1}{4 \cdot 7^3}}{2!}1^2 = 7.0711$$

con error$< 10^{-3}$.

(Nota: El valor que resulta de calcular $\sqrt{50}$ *en calculadora es de* $7.071067\ldots$, *por lo que observamos que, efectivamente, el valor resultante de la aproximación se diferencia en menos de* 10^{-3} *del verdadero valor).*

Example *Calcular el polinomio de McLaurin para el que la aproximación de* $f(x) = \sinh(x)$ *tiene un error menor que* 10^{-3} *en todo el intervalo* $[-1, 1]$.

Aplicación a la determinación de extremos relativos.

En el tema anterior se recordaba la definición de extremo relativo y la condición necesaria para que existiese el mismo (han de ser puntos críticos, es decir, puntos que verifican $f'(x) = 0$). Puesto que esta condición no es suficiente, puede probarse como la fórmula de Taylor nos permite establecer una caracterización de extremo relativo según sea el orden de la primera derivada no nula en el punto a. En concreto, se prueba que para que exista un extremo relativo en un punto crítico a, la primera derivada que no se anule ha de ser de orden par, mientras que todas las derivadas de orden impar anteriores han de ser nulas. Cuando ocurre al revés, es decir, cuando la primera derivada que no se anula es de orden impar, siendo nulas las derivadas pares anteriores, no hay extremo relativo, sino que aparece lo que denominamos **punto de inflexión**. Se ‘puede ver todo este desarrollo en el Anexo 1.1.3 incluido en el aula virtual.

Desarrollos limitados. Aplicación al cálculo de límites indeterminados.

Definition *Se dice que una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite un* ***desarrollo limitado*** *de orden n en el punto $a \in I$, si existe un polinomio de grado n tal que para $x \in I$ se verifica*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

siendo $o((x-a)^n)$ un infinitésimo en el punto a de orden superior a $(x-a)^n$, es decir, una función que verifica

$$\lim_{x \to a} o((x-a)^n) = 0 \text{ y tal que } \lim_{x \to a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$$

Remark *Notemos que la expresión anterior es muy parecida a la que nos da la fórmula de Taylor, aunque expresando el resto de la forma $o((x-a)^n)$. Por tanto, puede deducirse sin problema que si una función puede desarrollarse por Taylor, éste desarrollo también es lo que llamamos desarrollo limitado. Por tal motivo, y en lo que sigue, hablaremos indistintamente de desarrollos limitados en el punto a o de desarrollos de Taylor en el punto a.*

Antes de ver como estos desarrollos nos van a servir para resolver límites indeterminados, es aconsejable que le prestemos especial atención a la siguiente propiedad, que por comodidad vamos a enunciar en el punto $a = 0$, aunque podríamos considerar un punto a cualquiera:

Proposition *(Operaciones con desarrollos limitados) Sean f y g dos funciones que admiten desarrollos limitados de orden n en el punto 0, siendo sus respectivos polinomios $p(x)$ y $q(x)$. Entonces:*

a) La función $f \pm g$ admite en 0 un desarrollo limitado de orden n, siendo su polinomio el obtenido de hacer $p(x) \pm q(x)$.

b) La función producto $f \cdot g$ admite en 0 un desarrollo limitado de orden n, siendo su polinomio el obtenido al prescindir en el producto de polinomios $p(x) \cdot q(x)$ de todos aquellos términos de grado mayor que n.

c) Si $g(0) \neq 0$, la función cociente $\frac{f}{g}$ admite en 0 un desarrollo limitado de orden n, siendo su polinomio el obtenido al dividir $p(x)$ entre $q(x)$, ordenados según potencias crecientes de x, hasta grado n.

d) Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, la función compuesta $g \circ f$ (suponemos que existe dicha composición) admite en 0 un desarrollo limitado de orden n, siendo el polinomio del propio desarrollo el obtenido de suprimir en la composición $q \circ p$ los términos de grado mayor que n.

Example *Utilizando la propiedad anterior, y a partir de los desarrollos de McLaurin de $f(x) = e^x$ y $g(x) = \log(1+x)$, obtener los desarrollos de McLaurin de:*

a) La función suma $(f+g)(x) = e^x + \log(1+x)$.

b) La función resta $(f-g)(x) = e^x - \log(1+x)$.

c) La función producto $(f \cdot g)(x) = e^x \cdot \log(1+x)$.

Example *Utilizando la propiedad anterior, y a partir de los desarrollos de McLaurin de* $f(x) = \sin(x)$ *y* $g(x) = \tan(x)$, *obtener los desarrollos de McLaurin de:*

a) La función cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$.

b) La función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\tan(x)) = \sin(\tan(x))$.

Aplicación al cálculo de límites.

Para la resolución de ciertas indeterminaciones, un método bastante eficaz consiste en localizar expresiones equivalentes a la dada (es decir, expresiones que tienen el mismo límite que la original) mediante la obtención de desarrollos limitados de las funciones elementales que componen dicha expresión. Como veremos, de esta forma resolveremos fácilmente la indeterminación, puesto que los límites resultantes son siempre límites de polinomios.

Example *Calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3) - \tan(x^3)}{x^9}$$

(Solución: $-\frac{1}{2}$*)*

Remark *Recordamos que la regla de L'Hôpital solo permite resolver indeterminaciones de la forma* $\frac{0}{0}$ *y/o* $\frac{\infty}{\infty}$. *Sin embargo, este nuevo procedimiento deTambién podemos resolver límites cuando* $x \to \infty$ *(para realizar un desarrollo en el punto* ∞ *primero realizaremos un cambio de variable haciendo* $y = \frac{1}{x}$, *de manera que al nuevo límite lo resolveremos mediante desarrollos de McLaurin, ya que la nueva variable* $y \to 0$*) y/o que correspondan a otro tipo de indeterminaciones. Lo vemos en los siguientes ejemplos.*

Example *Calcular, utilizando desarrollos, los siguientes límites:*

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\right)^x \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(x^3\log\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{x^2}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

(Solución: $(a)\ e^{-\pi};\ (b)\ 0$*)*

Ejercicios resueltos.

1. Probar, utilizando desarrollos de McLaurin, la desigualdad

$$e^x \geq 1 + x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Esta desigualdad ha sido probada en el tema anterior aplicando el teorema de Lagrange. Veamos como puede probarse también utilizando desarollos de McLaurin:

La desigualdad es trivial, puesto que si realizamos un desarrollo de grado 1 para la función e^x, tendremos que

$$e^x = 1 + x + Resto$$

pero se verifica que

$$e^x = 1 + x + Resto \geq 1 + x$$

puesto que trivialmente se tiene que

$$Resto = \frac{f''(c)}{2!}x^2 = \frac{e^c}{2!}x^2 \geq 0$$

2. Idem para

$$0 < 1 - \frac{\sin(x)}{x} < \frac{x^2}{2} \qquad \text{si } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Solución: Puesto que x no se anula, la desigualdad equivale a probar que

$$0 < x - \sin(x) < \frac{x^3}{2} \qquad \text{si } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

La primera parte es inmediata, ya que al ser $\sin(x) < x$ (lo hemos probado en uno de los ejercicios resueltos del tema anterior), tendremos que

$$0 < x - \sin(x)$$

Para la segunda parte, probaremos que

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{2} > 0$$

pero esto es inmediato, ya que si consideramos el desarrollo de McLaurin para la función $\sin(x)$, se verificará que

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{2} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + Resto\right) - x + \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{3} + Resto$$

y esta última cantidad es trivialmente positiva, puesto que

$$\frac{x^3}{3} + Resto = \frac{x^3}{3} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{x^3}{3} + \frac{\sin(c)}{4!}x^4 > 0$$

al ser $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $c \in (0,x)$.

3. Calcular la raíz

$$\sqrt[5]{244}$$

con un error máximo permitido de 10^{-6}.

Solución: El número más cercano a 244 y que tiene raíz quinta exacta es 243 ($3^5 = 243$). Por tal motivo, consideraremos la función $f(x) = \sqrt[5]{243 + x}$ y a ésta será la que aplicaremos su desarrollo de McLaurin (ya que, tanto los valores de esta función como los de sus derivadas en el punto $x_0 = 0$ son inmediatos de calcular). Cuando tengamos este desarrollo, lo usaremos para obtener $f(1)$, que es el valor que se nos pide aproximar (ya que $f(1) = \sqrt[5]{244}$).

A partir de $f(x) = \sqrt[5]{243 + x}$ obtenemos (inicialmente vamos a aproximar por un polinomio de 2do grado, y acotaremos su error)

$$f(0) = 3;\ f'(0) = \frac{1}{5 \cdot 3^4};\ f''(0) = \frac{-4}{25 \cdot 3^9};\ f'''(c) = \frac{36}{125\sqrt[5]{(243 + c)^{14}}}$$

con $0 < c < x$. De esta forma, resulta

$$f(x) = \sqrt[5]{243+x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3 =$$
$$= 3 + \frac{1}{5\cdot 3^4}x - \frac{2}{25\cdot 3^9}x^2 + \frac{1}{6}\frac{36}{125\sqrt[5]{(243+c)^{14}}}x^3$$

Así, tendremos que

$$f(1) = \sqrt[5]{244} \simeq 3 + \frac{1}{5\cdot 3^4}1 - \frac{2}{25\cdot 3^9}1^2 \simeq 3.002465$$

con error dado por

$$R = \frac{1}{6}\frac{36}{125\sqrt[5]{(243+c)^{14}}}1^3 < \frac{1}{6}\frac{36}{125\sqrt[5]{(243+0)^{14}}} = \frac{6}{125\cdot 3^{14}} < 10^{-6}$$

Si el error no nos hubiese dado menor que 10^{-6}, deberíamos de aproximar por un polinomio de McLaurin de grado mayor que dos.

4. Utilizar el desarrollo de McLaurin para la función $\arctan x$ y la identidad

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

para obtener el valor de π con error menor que 10^{-5}.

Solución: Calculamos, en primer lugar, el desarrollo para la función dada. Vamos a aproximar por un polinomio de grado 5 (así el resto estará en grado 6); si para este polinomio el error no fuese menor que 10^{-5}, entonces deberíamos de aproximar un polinomio de mayor grado:

Por ser una función donde sus derivadas sucesivas son cada vez más largas de escribir, las mismas las hemos obtenido con la ayuda del programa wxMaxima, resultando ser

$$f(0) = 0;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = 0;\ f'''(0) = -2;\ f^{(4)}(0) = 0;\ f^{(5)}(0) = 24$$
$$f^{(6)}(c) = -\frac{720c}{(1+c^2)^4} + \frac{3840c^3}{(1+c^2)^5} - \frac{3840c^5}{(1+c^2)^6}$$

donde $0 < c < x$.

Usaremos entonces la fórmula de McLaurin para aproximar las cantidades pedidas:

$$4\arctan\frac{1}{5} = 4\left(0 + 1\frac{1}{5} + \frac{0}{2!}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{-2}{3!}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{0}{4!}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{24}{5!}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \frac{f^{(6)}(c)}{6!}\left(\frac{1}{5}\right)^6\right)$$

donde $0 < c < \frac{1}{5}$. Así,

$$4\arctan\frac{1}{5} \simeq 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5\right)$$
$$\simeq 0.78959$$

siendo el error el dado por

$$Resto = \frac{1}{6!}\left(-\frac{720c}{(1+c^2)^4} + \frac{3840c^3}{(1+c^2)^5} - \frac{3840c^5}{(1+c^2)^6}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^6 <$$

$$< \frac{1}{6!}\left(-\frac{720\cdot 0}{\left(1+(\frac{1}{5})^2\right)^4} + \frac{3840(\frac{1}{5})^3}{(1+0^2)^5} - \frac{3840\cdot 0^5}{\left(1+(\frac{1}{5})^2\right)^6}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^6 \simeq$$

$$\simeq 2.7307 \times 10^{-6}$$

ya que $0 < c < \frac{1}{5}$.

De igual forma,

$$\arctan\frac{1}{239} = 0 + 1\frac{1}{239} + \frac{0}{2!}\left(\frac{1}{239}\right)^2 + \frac{-2}{3!}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{0}{4!}\left(\frac{1}{239}\right)^4 +$$

$$+\frac{24}{5!}\left(\frac{1}{239}\right)^5 + \frac{f^{(6)}(c)}{6!}\left(\frac{1}{239}\right)^6\Bigg)$$

donde $0 < c < \frac{1}{239}$. Así,

$$\arctan\frac{1}{239} \simeq \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 \simeq$$

$$\simeq 4.1841 \times 10^{-3}$$

siendo

$$Resto = \frac{1}{6!}\left(-\frac{720c}{(1+c^2)^4} + \frac{3840c^3}{(1+c^2)^5} - \frac{3840c^5}{(1+c^2)^6}\right)\left(\frac{1}{239}\right)^6 <$$

$$< \frac{1}{6!}\left(-\frac{720\cdot 0}{\left(1+(\frac{1}{239})^2\right)^4} + \frac{3840(\frac{1}{239})^3}{(1+0^2)^5} - \frac{3840\cdot 0^5}{\left(1+(\frac{1}{239})^2\right)^6}\right)\left(\frac{1}{239}\right)^6 \simeq$$

$$\simeq 2.0961 \times 10^{-21}$$

En definitiva, resulta ser, dentro del margen de error establecido (y que viene dado por el mayor de los dos errores)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \simeq 0.78959 - 4.1841 \times 10^{-3} = 0.78541$$

de donde

$$\pi \simeq 0.78541 \cdot 4 = 3.14164$$

5. Dada la función

$$f(x) = \frac{1 + 2x\arctan(x)}{1+x^2}$$

se trata de calcular sus extremos absolutos en los siguientes conjuntos:

a) En $|x| \leq \frac{1}{2}$ *b*) En $|x| \leq 2$ *c*) En todo $\mathbb{R}$

Solución: Por lo que conocemos de la teoría, los extremos absolutos de una función continua se encuentran en los extremos del intervalo o pueden encontrarse en su interior, en cuyo caso, éstos también son extremos relativos. Por tal motivo, hallaremos los extremos relativos de esta función (con que hallemos los puntos críticos es suficiente) en cada uno de los conjuntos dados y evaluaremos f en ellos, así como también en los extremos de los correspondientes intervalos. Donde se obtenga el mayor (resp. menor) valor estará el máximo absoluto (resp. mínimo).

Para calcular los puntos críticos, resolvemos

$$f'(x) = \frac{(2-2x^2)\arctan(x)}{(1+x^2)^2} = 0$$

que tiene por soluciones $\{1, -1, 0\}$.

(a) En $|x| \le \frac{1}{2}$, es decir, si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, solo está incluido el punto crítico $x = 0$. Así, al ser $f(0) = 1$ y $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.1709$, resulta que el mínimo absoluto se alcanzará en $x = 0$, mientras que el máximo absoluto estará en los puntos $x = \pm\frac{1}{2}$.

(b) En este caso los tres puntos críticos están en el intervalo considerado. Al ser $f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 1.2854$, y $f(2) = f(-2) = 1.0857$, el máximo absoluto estará en $x = \pm 1$ y el mínimo absoluto en $x = 0$.

(c) También ahora los tres puntos críticos son interiores al intervalo considerado (siendo $f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 1.2854$), mientras que los valores que alcanza la función en los extremos del intervalo vienen dados por

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+2x\arctan(x)}{1+x^2} = 0$$

(éste límite puede resolverse utilizando L'Hôpital). Por tanto, el máximo absoluto se alcanza en $x = \pm 1$ y no tiene mínimo absoluto.

6. *(1er parcial, febrero 2017)* Determinar el valor de los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}\right) \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2(2-2\cos x - x^2 e^x)}$$

Solución:

(6.a) Se trata de una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$, que podremos transformar en $\frac{0}{0}$ si la escribimos en la forma

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}}{\frac{1}{x}}$$

Si aplicamos L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - e^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\sin\frac{1}{x} - 2e^{2/x}\right) = 0 - 2 = -2$$

También podemos resolver este límite utilizando desarrollos de McLaurin, aunque previamente tendremos que realizar el cambio $y = \frac{1}{x}$, es decir,

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\cos\frac{1}{x} - e^{2/x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(\cos y - e^{2y})$$

Este último límite lo resolvemos utilizando los correspondientes desarrollos de McLaurin y simplificando:

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(\cos y - e^{2y}) = \lim_{y\to 0} \frac{\left[1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right] - \left[1 + (2y) + \frac{(2y)^2}{2!} + \ldots\right]}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[-2 - \frac{5y}{2} + \ldots\right] = -2$$

(6.b) Podríamos aplicar L'Hôpital o usar desarrollos de McLaurin. Si lo hacemos de esta segunda forma,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^2(2-2\cos x - x^2e^x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right] - x + \frac{x^3}{6}}{x^2\left(2 - 2\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right] - x^2\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right]\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{5!} - \dots}{-x^5 + \dots} = -\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}$$

7. *(1er parcial, febrero 2017)* Obtener un adecuado polinomio de Taylor de grado 2 para la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

Utilizar este polinomio para aproximar el valor de

$$\int_0^{0.5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

acotando el error cometido.

Solución: Vamos a utilizar un desarrollo de McLaurin de grado 2 para $f(x)$, ya que en el punto $a = 0$ es fácil tanto calcular el valor de f como de sus derivadas sucesivas, como vemos a continuación:

No es preciso calcular la integral que nos da la expresión de $f(x)$ (además es imposible, ya que $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ no tiene primitiva), sino que como vamos a usar la fórmula

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \text{Resto}$$

lo que necesitamos es calcular el valor de f y de sus sucesivas derivadas en $x = 0$, lo que es inmediato, puesto que

$$f(0) = \int_0^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} = 0$$

mientras que, por el teorema fundamental del Cálculo, sabemos que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0^3}} = 1$$

De esta forma, y como

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+x^3)^{-3/2}3x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

resultará ser

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \text{Resto} = x + \text{Resto}$$

Por ello, si aproximamos la función por la parte polinómica de este desarrollo, tendremos

$$\int_0^{0.5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \approx 0 + 1\cdot 0.5 = 0.5$$

con error dado por

$$\text{Error} = \left|\frac{f'''(c)}{3!}(0.5)^3\right|$$

siendo $0 < c < 0.5$, y como

$$f'''(x) = \frac{27x^4 - 12x\sqrt{(1+x^3)^2}}{4\sqrt{(1+x^3)^5}}$$

se tiene

$$\text{Error} = \left| \frac{1}{3!} \frac{27c^4 - 12c\sqrt{(1+c^3)^2}}{4\sqrt{(1+c^3)^5}}(0.5)^3 \right| < \left| \frac{1}{3!} \frac{27(0.5)^4 - 12(0)}{4\sqrt{(1+0^3)^5}}(0.5)^3 \right| = 0.0088$$

(NOTA: El valor que se obtiene para $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ utilizando un adecuado método numérico (ya que esta función carece de primitiva) es de 0.49258, por lo que observamos que la diferencia entre el valor obtenido al aplicar la fórmula de McLaurin y el verdadero valor de la integral es menor que el error obtenido).

Ejercicios propuestos.

Ver ejercicios en ficheros Ejercicios tema1.1.2y3.pdf y ANEXO1.1.3-completo.pdf, incluido en el Aula Virtual.