Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 1.1.2: DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

PROGRAMA DETALLADO:

- **Definición de derivada**. **Primeras propiedades**.
- **Derivadas sucesivas**.
- **Reglas de la derivación**. **Derivadas de funciones elementales**. **Derivada de la función compuesta y de la función inversa**.
- **Crecimiento y decrecimiento**. **Extremos relativos**.
- **Teoremas del valor medio**: **Consecuencias**. **Regla de L'Hopital**.
- **Ejercicios resueltos**.
- **Ejercicios propuestos**.

Definición de derivada. Primeras propiedades.

En este tema vamos a recordar conceptos y propiedades relacionados con la noción de derivada de una función en un punto. La mayoría de los mismos son conocidos por haberlos estudiado en Bachillerato. Este tema puede ampliarse (con toda la teoría completa y más ejercicios) con ANEXO1.1.2-completo_Fich1.pdf y ANEXO1.1.2-completo_Fich2.pdf incluidos en el Aula Virtual.

En todo el tema siempre consideraremos que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con I un conjunto (por ejemplo, un intervalo) abierto.

Definition *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $a \in I$. Se dice que f es* ***derivable en el punto*** *a cuando existe (y es finito) el valor de cualquiera de los siguienes límites (los dos son los mismos)*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad ó \qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

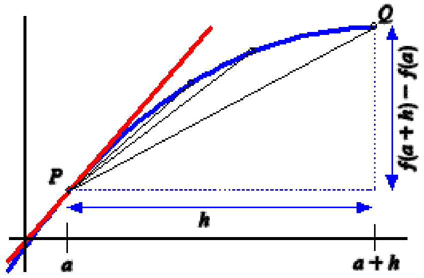
Al valor de este límite se le llama ***derivada*** *de f en el punto a, y lo representamos por $f'(a)$.*

Remark *Destacamos los siguientes aspectos relacionados con la definición anterior:*

a) Derivadas laterales.

b) Interpretación geométrica de la derivada en un punto a. La recta tangente:

Al venir definida ésta como un límite cuando $x \to a$, el concepto de derivada será de índole "local". Notemos que el cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nos da la tangente (o pendiente) de la recta secante que une los puntos $(a,f(a))$ y $(a+h,f(a+h))$. Por tanto, si vamos dibujando cada vez más rectas cuando $h \to 0$, es decir, si vamos dibujando cada vez más rectas que unen ambos puntos cuando el punto $(a+h,f(a+h))$ se acerca al punto $(a,f(a))$ (y que vienen pintadas en negro en la gráfica siguiente), la "última" de las rectas que obtendremos (en rojo en la gráfica), tendrá una pendiente que viene dada por $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



Por tal motivo, obtener la derivada de una función en un punto, no es sino calcular la pendiente de la última de la rectas secantes que unen los puntos $(a, f(a))$ *y* $(a+h, f(a+h))$ *cuando* $h \to 0$. *Notemos que esta última recta, tocará a la curva* $y = f(x)$ *en un único punto* $(a, f(a))$, *y al tener por pendiente* $f'(a)$, *su ecuación vendrá dada por*

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

que es la expresión de la ***recta tangente*** *a una curva* $y = f(x)$ *en* $x = a$.

c) Relación de derivabilidad y continuidad.

$$f \text{ derivable en } a \Rightarrow f \text{ continua en } a$$

Pero el recíproco no es cierto.

Example *Calcular, utilizando la definición de derivada de una función en un punto,* $f'(1)$, *siendo* $f(x) = e^x$. *Hallar la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto* $a = 1$.

Derivadas sucesivas.

Cuando una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en todos los puntos de I, se dice que f es **derivable en** I. En tal caso, podemos definir una nueva función, a la que representaremos por f', y que viene dada por

$$\begin{aligned} f' \ &: \ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

A esta nueva función se le llama **función derivada** de f (o simplemente, **derivada** de f).

A su vez, puede ocurrir que esta nueva función f' sea derivable en un conjunto $J \subset I$, de manera que podremos definir otra nueva función, a la que representamos por f'', y a la que llamaremos **derivada segunda** de f, y que viene dada por

$$\begin{aligned} f'' \ &: \ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f''(x) := (f'(x))' \end{aligned}$$

Analogamente podemos considerar las funciones derivadas sucesivas f''', $f^{(4)}$, etc.

Reglas de la derivación. Derivadas de funciones elementales. Derivada de la función compuesta y de la

función inversa.

Proposition *(Reglas de la derivación) Se verifican:*

a) Si $f(x) = k$ *(constante), entonces* $f'(x) = 0$.

b) Si $f(x) = k \cdot g(x)$, *con g función derivable y k constante, entonces* $f'(x) = k \cdot g'(x)$.

c) Si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, *siendo u y v funciones derivables, entonces*

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

d) Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, *siendo u y v funciones derivables, entonces*

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

e) Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, *siendo u y v funciones derivables, con* $v(x) \neq 0$, *entonces*

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Proposition *(Derivadas de las funciones elementales) Se verifican:*

$$y = f(x) = x^k \ (k \text{ cte}) \Rightarrow y' = kx^{k-1}$$

$$y = \log_a(x) \Rightarrow y' = \tfrac{1}{x} \log_a(e)$$

$$y = \log(x) \Rightarrow y' = \tfrac{1}{x}$$

$$y = k^x \Rightarrow y' = k^x \log(k)$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = \sin(x) \Rightarrow y' = \cos(x)$$

$$y = \cos(x) \Rightarrow y' = -\sin(x)$$

$$y = \tan(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$y = \arcsin(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos(x) \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctan(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \sinh(x) \Rightarrow y' = \cosh(x)$$

$$y = \cosh(x) \Rightarrow y' = \sinh(x)$$

$$y = \tanh(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

$$y = \arg\sinh(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y = \arg\cosh(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \arg\tanh(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}$$

Proposition *(Derivada de la función compuesta: **Regla de la cadena**) Sea* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable en* $a \in I$ *y sea* $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable en* $f(a)$, *donde se supone que* $f(I) \subset J$ *(para que así se pueda considerar la función compuesta* $g \circ f$*). Entonces, la función compuesta* $g \circ f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es derivable en a y se verifica que su derivada viene dada por*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Remark *(Derivación logarítmica) Establecer la derivada para la función* $y = (f(x))^{g(x)}$.

Proposition *(Derivada de la función inversa) Sea* $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ *una función* *estrictamente monótona y continua en I (estas son condiciones suficientes para que exista la función inversa* f^{-1}*). Entonces, si f es derivable en* $a \in I$, *siendo* $f'(a) \neq 0$, *se verifica que la función inversa* $f^{-1} : J \to I$ *es derivable en el punto* $b = f(a)$ *y su derivada viene dada por*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Example *A partir de la derivada de* $f(x) = \sin(x)$, *establecer la derivada de* $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

Definition *Sea* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se dice que f es* ***creciente en*** $a \in I$ *si existe un entorno del punto a,* $(a-\delta, a+\delta)$, *tal que si* $a', a'' \in (a-\delta, a+\delta)$, *siendo* $a' < a < a''$, *entonces se tiene que*

$$f(a') \leq f(a) \leq f(a'')$$

Análogamente, se dice que f es ***decreciente en*** $a \in I$ *si existe un entorno del punto a,* $(a-\delta, a+\delta)$, *tal que si* $a', a'' \in (a-\delta, a+\delta)$, *siendo* $a' < a < a''$, *entonces se tiene que*

$$f(a') \geq f(a) \geq f(a'')$$

Definition *Si en la anterior definición se cambia el signo* $\leq$ *(resp.* $\geq$*) por el signo* $<$ *(resp.* $>$*) se dice que la función es* ***estrictamente creciente*** *(resp.* ***estrictamente decreciente****) en a.*

Proposition *(Relación con la derivada) Sea* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable en* $a \in I$. *Entonces se verifica*

$$f \text{ es estrictamente creciente en } a \Leftrightarrow f'(a) > 0$$

$$f \text{ es estrictamente decreciente en } a \Leftrightarrow f'(a) < 0$$

Definition *Una función* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tiene un* ***máximo relativo en un punto*** $a \in I$ *si existe un entorno del punto a,* $(a-\delta, a+\delta)$, *tal que se verifica que*

$$f(x) \leq f(a),\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tiene un* ***mínimo relativo en un punto*** $a \in I$ *si existe un entorno del punto a,* $(a-\delta, a+\delta)$, *tal que se verifica que*

$$f(x) \geq f(a),\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

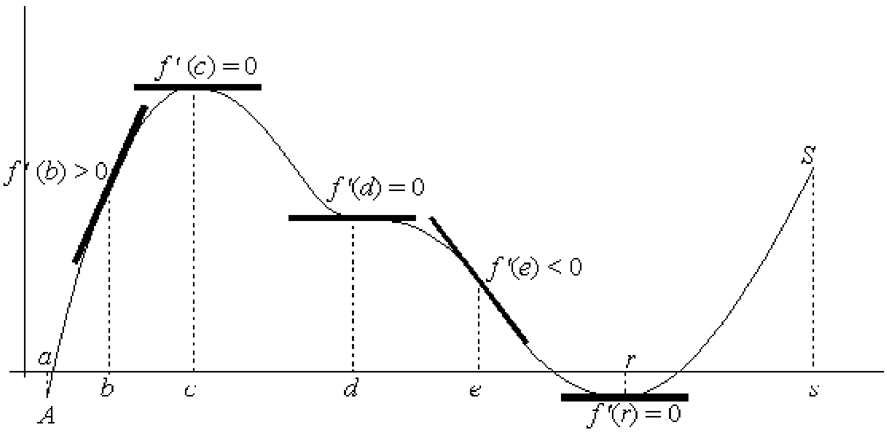
Proposition *(Condición necesaria de extremo relativo) Sea* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable en* $a \in I$. *Si f presenta en a un extremo relativo (ya sea máximo o mínimo), entonces* $f'(a) = 0$. *En este caso, se dice que a es un* ***punto crítico*** *de f.*

Remark *Como bien es sabido, esta condición solo es necesaria (es decir, si en a hay extremo relativo, entonces ha de ser* $f'(a) = 0$*), pero no es condición suficiente (ya que **NO** siempre ocurre el recíproco, es decir, si* $f'(a) = 0$ *eso NO quiere decir que en el punto a exista un extremo relativo). Sin embargo, sí que este resultado nos ayuda para calcular extremos relativos, puesto que nos da los posibles puntos candidatos a ser extremos (solo tenemos que "buscar" entre los valores que hacen nula la derivada de f, es decir, entre los puntos críticos de f; aunque no todos ellos serán máximos o mínimos relativos). Por tal motivo, tendremos que acudir a otra serie de consideraciones que nos aseguren cuando un punto crítico va a ser también extremo relativo. Como es conocido, podemos utilizar cualquiera de los dos criterios siguientes:*

- Signo de la primera derivada en un entorno del punto crítico: Estudiamos el crecimiento y decrecimiento a ambos lados del punto crítico, es decir, vemos el signo que toma $f'(x)$ *para valores de x en un entorno de a,* $x \in (a-r, a+r)$*. Si en a la función pasa de ser creciente a decreciente, en a existirá un máximo relativo; si pasa de ser decreciente a creciente, en a existirá un mínimo relativo.*

- Signo de $f''(a)$ *: Si* $f''(a) > 0$*, en a existirá un mínimo relativo; si* $f''(a) < 0$*, en a existirá un máximo relativo. Como para establecer la demostración de este resultado es preciso acudir a la fórmula de Taylor, que estudiaremos en el tema siguiente, será en este tema cuando volveremos a a hacer referencia a este resultado.*

Una interpretación gráfica de los resultados anteriores la tenemos en la gráfica siguiente:



Teoremas del valor medio: Consecuencias. Reglas de L'Hopital.

De forma análoga a los 3 teoremas que hemos visto en el tema anterior relacionados con la continuidad de una función en un intervalo compacto, existen otros 3 teoremas relacionados con funciones derivables en un intervalo:

Theorem ***(Rolle)*** *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua en todo* $[a,b]$ *y derivable en su interior* (a,b)*. Si además se verifica que* $f(a) = f(b)$*, entonces existe al menos un punto* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Theorem *(Valor medio o de **Cauchy**) Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en todo $[a,b]$ y derivables en su interior (a,b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Remark *En las hipótesis del teorema anterior, si además se supone que $g(b) \neq g(a)$ y que $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$, la igualdad del teorema del valor medio se puede expresar en la forma habitual*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Theorem *(Incrementos finitos o de **Lagrange**) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en todo $[a,b]$ y derivable en su interior (a,b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Entre las consecuencias más importantes de estos teoremas, cabe destacar los siguientes resultados, conocidos como reglas de L'Hôpital, y que nos permiten resolver indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$):

Proposition *(1^a regla de L'Hôpital) Sean f y g funciones derivables en un entorno reducido del punto a, $(a-\delta, a+\delta)^*$, y tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, con $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$. Entonces, si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, se verifica que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Proposition *(2^a regla de L'Hôpital) Sean f y g funciones derivables en un entorno reducido del punto a, $(a-\delta, a+\delta)^*$, y tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$. Entonces, si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, se verifica que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Remark *Veamos, a través de ejemplos, como se puede aplicar las reglas de L'Hôpital al resto de indeterminaciones:*

Ejercicios resueltos.

1. Probar, utilizando el teorema de Lagrange, que se verifica la siguiente desigualdad siempre que $x \geq 0$:

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$$

Solución: Aplicaremos el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \log(1+x)$ en el intervalo

$[0,x]$:

Por dicho teorema, resulta que existirá un $c \in (0,x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = (x-0)f'(c) \Leftrightarrow \log(1+x) - \log(1) = x\frac{1}{1+c}$$

Pero entonces, al ser $c \in (0,x)$, se tendrá

$$x\frac{1}{1+x} \leq \log(1+x) = x\frac{1}{1+c} \leq x\frac{1}{1+0} = x$$

como queremos demostrar.

2. Probar la conocida desigualdad

$$\sin(x) < x$$

para todo $x > 0$.

Solución: Esta es una desigualdad conocida, ya que compara el arco con el seno del mismo. Veamos como se puede probar:

Podemos considerar la función $f(x) = x - \sin(x)$, que tiene por derivada $f'(x) = 1 - \cos(x)$. Como esta derivada siempre es positiva (ya que siempre se tiene que $\cos(x) \leq 1$), resulta que la función $f(x)$ será creciente, por lo que si $x > 0$, tendremos que $f(x) > f(0)$, es decir, que $x - \sin(x) > 0$, como queremos probar.

3. Probar la desigualdad

$$0 < 1 - \cos(x) < \frac{x^2}{2}$$

si $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución: La primera parte de la desigualdad equivale a probar que $\cos(x) < 1$, lo que es trivial si $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (ya que, en general se verifica que $\cos(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$).

Para probar la segunda parte, aplicaremos el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) - 1$, y bastará con probar que $f(x) > 0,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Así, si aplicamos Lagrange a esta $f(x)$ en el intervalo $[0,x]$, con $x < \frac{\pi}{2}$, existirá un $c \in (0,x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = (x-0)f'(c)$$

es decir, tal que

$$f(x) = xf'(c) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) - 1 = x(c - \sin(c))$$

y $x(c - \sin(c)) > 0$, ya que $x > 0$ y $c > \sin(c)$ (por el resultado del ejercicio anterior).

Otra forma de probar la segunda desigualdad, sería estudiando que la función $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos(x) - 1$ es estríctamente creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (para lo que estudiamos el signo de su derivada $x - \sin(x) > 0,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$).

4. Idem para

$$e^x \geq 1+x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Esta desigualdad también puede probarse mediante el teorema de Lagrange, estudiando el crecimiento de una función o usando desarrollos de McLaurin (como veremos en el tema siguiente):

Así, supongamos inicialmente que $x > 0$. Si tomamos $f(x) = e^x$ y utilizamos Lagrange en $[0,x]$, se tendrá que existirá $c \in (0,x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = (x-0)f'(c) \Leftrightarrow e^x - 1 = xe^c$$

por lo que al ser $c \in (0,x)$ y la función e^x creciente, en particular tendremos que

$$e^x - 1 = xe^c \geq xe^0 = x$$

De forma análoga lo probaríamos si suponemos que $x < 0$ (aunque en este caso aplicaremos Lagrange en $[x,0]$).

5. Dada la función

$$f(x) = \frac{1+2x\arctan(x)}{1+x^2}$$

se trata de calcular sus extremos absolutos en los siguientes conjuntos:

$a)$ En $|x| \leq \frac{1}{2}$ $\qquad b)$ En $|x| \leq 2$ $\qquad c)$ En todo $\mathbb{R}$

Solución: Por lo que conocemos de la teoría, los extremos absolutos de una función continua se encuentran en los extremos del intervalo o pueden encontrarse en su interior, en cuyo caso, éstos también son extremos relativos. Por tal motivo, hallaremos los extremos relativos de esta función (con que hallemos los puntos críticos es suficiente) en cada uno de los conjuntos dados y evaluaremos f en ellos, así como también en los extremos de los correspondientes intervalos. Donde se obtenga el mayor (resp. menor) valor estará el máximo absoluto (resp. mínimo).

Para calcular los puntos críticos, resolvemos

$$f'(x) = \frac{(2-2x^2)\arctan(x)}{(1+x^2)^2} = 0$$

que tiene por soluciones $\{1,-1,0\}$.

(a) En $|x| \leq \frac{1}{2}$, es decir, si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, solo está incluido el punto crítico $x = 0$. Así, al ser $f(0) = 1$ y $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.1709$, resulta que el mínimo absoluto se alcanzará en $x = 0$, mientras que el máximo absoluto estará en los puntos $x = \pm\frac{1}{2}$.

(b) En este caso los tres puntos críticos están en el intervalo considerado. Al ser $f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 1.2854$, y $f(2) = f(-2) = 1.0857$, el máximo absoluto estará en $x = \pm 1$ y el mínimo absoluto en $x = 0$.

(c) También ahora los tres puntos críticos son interiores al intervalo considerado (siendo $f(0) = 1$, $f(1) = f(-1) = 1.2854$), mientras que los valores que alcanza la función en los extremos del intervalo vienen dados por

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+2x\arctan(x)}{1+x^2} = 0$$

(éste límite puede resolverse utilizando L'Hôpital). Por tanto, el máximo absoluto se alcanza en $x = \pm 1$ y no tiene mínimo absoluto.

Ejercicios propuestos.

Ver ejercicios en fichero Ejercicios tema1.1.2y3.pdf, incluido en el tema siguiente. También pueden verse más ejercicios en los ficheros ANEXO1.1.2-completo_Fich1.pdf y ANEXO1.1.2-completo_Fich2.pdf.