Asignatura: **Matemáticas I**
Profesor: **Roque Molina Legaz**

TEMA 1.1.1: LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL.

PROGRAMA DETALLADO:

- **Funciones reales de una variable real**.
- **Funciones elementales**.
- **Límite de una función en un punto**.
- **Límites laterales. Límite infinito y límite en el infinito**.
- **Infinitésimos e infinitos equivalentes**. **Indeterminaciones**.
- **Continuidad**. **Definiciones**.
- **Operaciones con funciones contínuas**.
- **Propiedades de las funciones continuas en intervalos compactos**.
- **Ejercicios propuestos**.

El objetivo principal del Análisis Matemático es el estudio de las funciones. En este tema de la asignatura vamos a recordar y/o introducir algunos conceptos y propiedades que serán fundamentales para el desarrollo completo de ésta y posteriores asignaturas. Como la mayoría de estos conceptos y propiedades han de ser conocidos por los alumnos (por haberlos estudiado en mayor o menor medida en Bachillerato), nos limitaremos a introducirlos de una forma práctica, dando un especial interés al concepto de límite de una función en un punto, concepto que va a ser fundamental en todo el Cálculo Diferencial e Integral (tanto en una como en varias variables).

Aunque lo que aquí se establece no es sino un resumen del tema, se recuerda al alumno que el mismo también lo tiene desarrollado por completo (con todas las definiciones, propiedades y demostraciones) en el fichero **ANEXO1.1.1-completo.pdf** incluido en el Aula Virtual. Lo mismo se realizará en la mayoría de temas que componen la parte de Cálculo Diferencial e Integral (en una y varias variables) de esta asignatura.

Funciones reales de una variable real.

En esta sección se recordarán determinados conceptos, como por ejemplo:

- Función real de una variable real.
- Dominio o campo de existencia de una función.
- Funciones pares e impares. Simetrías.
- Funciones crecientes, decrecientes y constantes.
- Funciones periódicas.
- Operaciones con funciones: suma, resta, producto, cociente y composición.
- Función inversa. ¿Cuando existe?

Exercise *Repasar estos conceptos en cualquier texto de Matemáticas II de bachillerato y/o en el fichero ANEXO1.1.1-completo.pdf (ver Aula Virtual).*

Exercise *Realizar el ejercicio 1 que aparece enunciado en el fichero Ejercicios_Tema1.1.1.pdf (ver Aula Virtual).*

Exercise *Realizar algunos de los ejercicios que aparecen enunciados al final del fichero ANEXO1.1.1-completo.pdf (ver Aula Virtual).*

Funciones elementales.

En esta sección se recordarán conceptos y propiedades de las siguientes funciones:
- Función potencia de base real y exponente entero.
- Función exponencial e^x.
- Función logarítmica. Función logaritmo neperiano $\log(x)$.
- Funciones trigonométricas y sus inversas.

Al mismo tiempo, vamos a introducir un nuevo tipo de funciones (las **funciones hiperbólicas**), que no son conocidas por los alumnos, pero que merecen que las estudiemos someramente, y que las incorporemos a nuestro "saco" de funciones elementales, así como que conozcamos sus propiedades más interesantes. Esto lo desarrollamos brevemente a continuación.

Funciones hiperbólicas.

Definiciones

Definition *Se define el* ***Seno Hiperbólico*** *como la función, que denotamos por* sinh *o Sh, y que viene definida por*

$$\begin{aligned} \sinh\ &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Se define el ***Coseno Hiperbólico*** *como la función, que denotamos por* cosh *o Ch, y que viene definida por*

$$\begin{aligned} \cosh\ &: \mathbb{R} \to [1,+\infty) \\ x \mapsto \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Se define la ***Tangente Hiperbólica*** *como la función, que denotamos por* tanh *o Th, y que viene definida por*

$$\begin{aligned} \tanh\ &: \mathbb{R} \to (-1,1) \\ x \mapsto \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

(notemos porqué está bien definida la función $\tanh(x)$*).*

Representaciones gráficas

La función $\sinh(x)$ es impar (ya que $\sinh(-x) = -\sinh(x)$), por lo que su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas. Además verifica trivialmente que $\sinh(0) = 0$, y, aunque todavía no hayamos recordado la definición de límite, debemos de conocer que

$$\lim_{x \to +\infty} \sinh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{+\infty - 0}{2} = +\infty$$

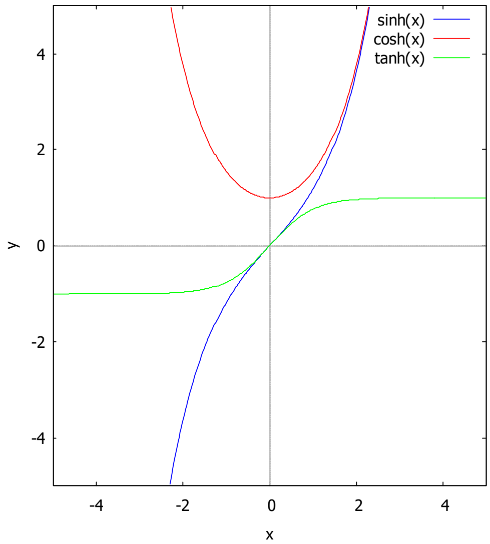
Análogamente, la función $\cosh(x)$ es par (ya que $\cosh(-x) = \cosh(x)$), por lo que su gráfica es simétrica respecto del eje Y. Además verifica que $\cosh(0) = 1$, que $\cosh(x) \geq 1$, y que

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{+\infty + 0}{2} = +\infty$$

Y por último, la función $\tanh(x)$ es impar (ya que $\tanh(-x) = -\tanh(x)$). Además verifica trivialmente que $\tanh(0) = 0$, y,

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} == \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Con todo lo anterior, podemos esbozar rápidamente las respectivas representaciones gráficas, obteniendo



Nota: Estas gráficas se han realizado con el programa wxMaxima -con el que haremos las prácticas de la asignatura:

plot2d([sinh(x), cosh(x), tanh(x)], [x,-5,5],[y,-5,5], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])$

Ecuaciones fundamentales.

A partir de las definiciones anteriores, se deducen sin dificultad las siguientes relaciones, análogas (muchas de ellas) a las de las funciones trigonométricas:

Proposition *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:*

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

ó lo que es equivalente

$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

De forma análoga, también se verifican:

$$\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$$
$$\tanh(x-y) = \frac{\tanh(x)-\tanh(y)}{1-\tanh(x)\tanh(y)}$$
$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2(x)+\sinh^2(x)$$
$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$$

Exercise *Probar las relaciones de la anterior Proposición.*

Funciones hiperbólicas inversas.

Podemos observar que la función $\sinh(x)$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (observamos en la gráfica respectiva que esta función es estríctamente creciente), por lo que tiene función inversa. A ésta, se le llama **Argumento Seno Hiperbólico**, y se suele representar por $\arg\sinh(x)$.

Análogamente, lo mismo verifica la función $\cosh(x)$ entre $[0,+\infty)$ y $[1,+\infty)$, por lo que a su inversa se le llamará **Argumento Coseno Hiperbólico**, representándose por $\arg\cosh(x)$.

Por último, la función $\tanh(x)$ es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $(-1,1)$, por lo que también existirá el **Argumento Tangente Hiperbólica**, representándose por $\arg\tanh(x)$.

Las gráficas de estas 3 nuevas funciones se obtienen a partir de sus funciones originales, sin más que recordar que la gráfica de una función y de su inversa siempre son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Desde el punto de vista de que las funciones hiperbólicas no son sino una adecuada combinación de la función exponencial e^x, parece lógico que las funciones hiperbólicas inversas puedan expresarse en función de la inversa de la función exponencial, es decir, de la función logarítmica $\log(x)$. De hecho, se prueba que se verifican las siguientes relaciones:

$$\arg\sinh(x) = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\arg\cosh(x) = \pm\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ \forall x \geq 1$$
$$\arg\tanh(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ \forall x \in (-1,1)$$

donde la expresión $\log(x)$ representa al **logaritmo neperiano**.

Límite de una función en un punto.

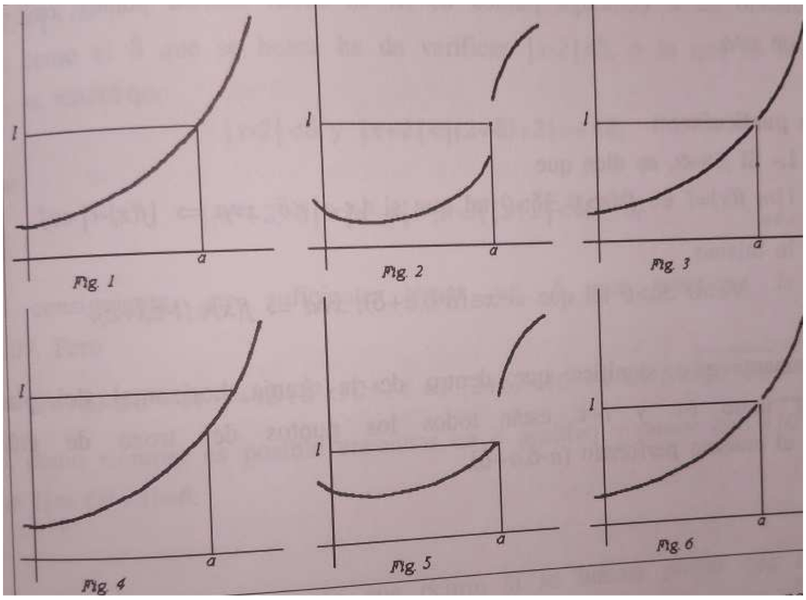
Como vamos a establecer formalmente a continuación, una función $f(x)$ tendrá límite l cuando x tiende al punto a, si $f(x)$ se acerca tanto como queramos al valor de l cuando x toma un valor lo suficientemente próximo al punto a; es decir, que si le damos a x valores muy cercanos al valor de a, entonces $f(x)$ toma valores muy próximos a l. Esto se representará por $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Como vamos a ver, para calcular $\lim_{x\to a} f(x) = l$, no es preciso que la función $f(x)$ esté definida en el propio punto a, ya que, según la definición que vamos a establecer, le vamos a dar valores a x próximos al punto a, es decir, valores que son un poco menores o mayores que el propio a, pero no tenemos que darle el valor a. Esto lo haremos así, ya que es posible que la función esté definida en a, pero también es posible que no esté definida en dicho punto (por eso hablaremos de darle valores a f que están en un *entorno perforado* de a).

Example *Dada la función* $f(x) = x^2$*, establecer el valor de* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *a partir de los valores que toma* $f(x)$ *en los puntos* $x = 2.999$, $x = 3.0001$. *¿Hay alguna diferencia con el valor* $f(3)$*?*

Example *Dada la función* $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$*, establecer el valor de* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *a partir de los valores que toma* $f(x)$ *en los puntos* $x = 2.999$, $x = 3.0001$. *¿Hay alguna diferencia con el valor* $f(3)$*?*

Así, de las siguientes gráficas sólo las Figuras 1, 3 y 6 tendrían límite l cuando $x \to a$:



Veamos como se formaliza este concepto:

Definition *Sea* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $a \in I$*. Se dice que* $f(x)$ ***tiene por límite el número real*** l *cuando x tiende al punto a, y se representa por*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

si se verifica que para todo valor de x próximo al punto a, siendo $x \neq a$, el valor que toma f en dicho punto se acerca al valor de l.

Matemáticamente, ésta definición se formaliza en los siguientes términos:

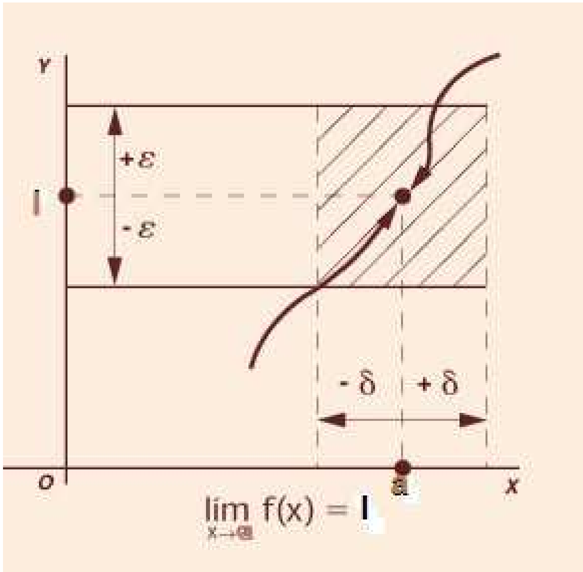
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \text{ si y solo sí para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } x \in (a-\delta, a+\delta),$$

$$\text{con } x \neq a, \text{ entonces } f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

o equivalentemente

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ tal que si } |x-a| < \delta,\ x \neq a \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon\right)$$

Gráficamente, esto significa que dentro de la franja horizontal comprendida entre $l-\varepsilon$ y $l+\varepsilon$ están las imágenes de todos los puntos del entorno "perforado" $(a-\delta, a+\delta)^*$ (ya que la función puede estar o no definida en el punto a). En la siguiente gráfica se intenta explicar este concepto, para lo que ampliamos tanto el entorno $(a-\delta, a+\delta)^*$ como el entorno $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$:



Remark *Se llama **entorno perforado o entorno reducido** del número real a, a todo entorno del punto a pero al que le quitamos el propio a, es decir*

$$(a-\delta, a+\delta)^* = (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$$

Remark *Notemos que el concepto de límite de una función en un punto es un concepto "local", es decir, nos informa sobre lo que ocurre con los valores de toma la función en las proximidades (es decir, en un entorno) de un punto a. Además, observamos que no es necesario que la función esté definida en el propio punto a para que exista su límite en dicho punto: es decir, inicialmente no tiene nada que ver el valor de $f(a)$ con el de $\lim_{x\to a} f(x)$, aunque suele ser habitual que ambos valores coincidan (o los hagamos coincidir redefiniendo el valor de $f(a)$); como debemos de recordar, en tal caso (también lo veremos más adelante) se dice que la función es **contínua** en el punto a.*

Entre las propiedades más importantes relacionadas con este concepto, destacamos (se recuerda que todas las demostraciones de las mismas están incluidas en el fichero ANEXO1.1.1-completo.pdf (ver Aula Virtual):

Proposition *Se verifican:*

a) Si existe el límite de una función en un punto, éste es único.

b) Si una función tiene límite en un punto, la función está acotada en un entorno de dicho punto.

c) Si $\lim_{x\to a} f(x) = l < \alpha$ *(respectivamente* $\lim_{x\to a} f(x) = l > \beta$*), existe un entorno de a donde la función toma valores menores que α (resp. mayores que β).*

d) Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq 0$*, existe un entorno de a donde la función tiene el mismo signo que su límite.*

e) Si $f,g,h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son 3 funciones que verifican, en las proximidades del punto a, que* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$*, siendo además* $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$*, entonces se verifica que* $\lim_{x\to a} f(x) = l$*.*

Proposition *(Operaciones con límites finitos) Supongamos que* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *y que* $\lim_{x\to a} g(x) = m$*. Entonces se verifican:*

a) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = l \pm m$.

b) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$.

c) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$*, siempre que* $m \neq 0$.

d) $\lim_{x\to a} K^{f(x)} = K^l$*, cualquiera que sea* $K > 0$.

e) $\lim_{x\to a}(\log(f(x))) = \log(\lim_{x\to a} f(x)) = \log(l)$*, siempre que* $l > 0$.

f) $\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right) = l^m$*, siempre que* $l > 0$.

Límites laterales. Límite infinito y límite en el infinito.

Límites laterales.

En esta subsección se recuerdan los conceptos de límites laterales (por la derecha, $\lim_{x\to a+} f(x)$, y por la izquierda, $\lim_{x\to a-} f(x)$), así como cuando hay que calcular éstos. Recordamos que para que exista el límite de una función en un punto, han de existir ambos límites laterales, y éstos ser iguales. Cuando éstos existen pero son distintos, sabemos (como veremos más adelante) que nos aparece la discontinuidad de *salto*.

Remark *Ver estas definiciones en el fichero ANEXO1.1.1-completo.pdf (ver Aula Virtual) o en cualquier texto de Matemáticas II de Bachillerato.*

Límites infinitos y límites en el infinito.

En esta subsección se recordarán las definiciones (formales) de lo que quiere decir que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = l, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = l,$$

y se recuerdan cuales son las operaciones que "se pueden hacer" cuando interviene el símbolo ∞.

Remark *Ver estas definiciones y operaciones en el fichero ANEXO1.1.1-completo.pdf (ver Aula Virtual) o en cualquier texto de Matemáticas II de Bachillerato.*

Infinitésimos e infinitos equivalentes. Indeterminaciones.

Sabemos que no siempre se pueden realizar cualquier tipo de operación en la que intervenga ∞. Así, por ejemplo, no podemos asegurar cual es el resultado de realizar las siguientes 7 (y no hay más) operaciones, a las cuales se les conoce como **Indeterminaciones**:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty \cdot 0;\ \infty - \infty;\ 1^{\infty};\ 0^{0};\ \infty^{0}$$

Resolución de algunas indeterminaciones.

Desde un punto de vista práctico recordaremos como resolver algunas de estas indeterminaciones, y que todas han sido estudiadas en las Matemáticas II de Bachillerato:

- Limites de cocientes de polinomios (indeterminaciones tipo $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$).
- Límites de expresiones irracionales (indeterminación tipo $\infty - \infty$).
- El número e (indeterminaciones tipo 1^{∞}): recordamos que el número e se puede definir como límite de una sucesión

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

(más adelante recordaremos conceptos sobre límites de sucesiones) o como el límite de una adecuada función

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

Infinitésimos e infinitos equivalentes.

En esta subsección vamos a conocer alguna operación "nueva" y que nos permite resolver indeterminaciones.

Definition *Se llama **infinitésimo en el punto** a a toda función con límite cero en dicho punto.*

*Análogamente, se llama **infinito en el punto** a a toda función con límite infinito en dicho punto.*

Entre las propiedades más interesantes de este tipo de funciones está la siguiente, la cual ilustraremos con un conocido ejemplo:

Proposition *El producto de un infinitésimo en un punto por una función acotada en un entorno de dicho punto, es otro infinitésimo.*

Example *Justificar que*

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

y ver, desde un punto de vista gráfico, la diferencia que hay entre este límite y

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

De cara a conocer otra técnica que nos permita resolver indeterminaciones, se da la siguiente definición y propiedad:

Definition *Dos infinitésimos (resp. infinitos) en el punto* a, *se dice que son* ***equivalentes*** *en dicho punto si verifican que*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Los representaremos por $f(x) \sim g(x)$ *(cuando* $x \to a$*).*

Proposition *(Principio de sustitución) Todo infinitésimo (resp. infinito) en un punto a que sea* ***factor o divisor*** *en un límite cuando* $x \to a$, *puede sustituirse por un equivalente en dicho punto sin que se altere el resultado de dicho límite.*

En base a este último resultado, es interesante conocer cuantas más equivalencias mejor, ya que, como veremos con ejemplos prácticos, los límites indeterminados se simplifican considerablemente. Por tal motivo, se incluyen a continuación las equivalencias más usuales con las que trabajaremos habitualmente:

Tabla de infinitésimos equivalentes más usuales:

$\sin(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $\sinh(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$)

$1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $\cosh(x)-1 \sim \frac{x^2}{2}$ (cuando $x \to 0$)

$\tan(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $\tanh(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$)

$\arcsin(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $\mathrm{argsinh}(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$)

$\arctan(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $\mathrm{argtanh}(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$)

$a^x - 1 \sim x\log(a)$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $e^x - 1 \sim x$ (cuando $x \to 0$)

$\log(1+x) \sim x$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $\log(x) \sim x-1$ (cuando $x \to 1$)

$(1+x)^\alpha - 1 \sim x$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \sim a_0$ (cuando $x \to 0$)

$\sin(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$) $\quad$ $\sinh(x) \sim x$ (cuando $x \to 0$)

Tabla de infinitos equivalentes más usuales:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \sim a_nx^n \text{ (si } x \to \infty)$$
$$\log(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0) \sim \log(x^n) \text{ (si } x \to \infty)$$

Remark *Las anteriores equivalencias pueden generalizarse sustituyendo en la tabla anterior la variable x (si* $x \to 0$*) por cualquier función* $f(x)$, *siempre que* $f(x) \to 0$; *es decir, igual que se verifica que* $\sin(x) \sim x$ *(cuando* $x \to 0$*), también se verificará que* $\sin(f(x)) \sim f(x)$ *(cuando* $f(x) \to 0$*); de igual forma, y al ser* $\log(x) \sim x-1$

(cuando $x \to 1$), también se verificará que $\log(f(x)) \sim f(x) - 1$ *(cuando* $f(x) \to 1$*).*

A veces aplicar equivalencias nos llevará a resolver de forma inmediata un límite indeterminado, como, por ejemplo, ocurre en el siguiente ejemplo:

Example *Para calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\log(1-5x)}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin(3x)}$$

utilizaremos las equivalencias siguientes (ya que las mismas se verifican cuando $x \to 0$ *y todas las funciones están multiplicando o dividiendo en este límite)*

$$1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2};\ \log(1-5x) \sim (-5x);\ e^{x^2}-1 \sim x^2;\ \sin(3x) \sim 3x$$

resultando

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\log(1-5x)}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}(-5x)}{x^2 3x} = -\frac{5}{6}$$

Example *(Septiembre 2012) Para calcular el siguiente límite*

$$\lim_{x\to -3} \frac{(\cos(x+3)-1)\arctan(x+3)}{(5^{x+3}-1)^2\log(x+4)}$$

usaremos infinitésimos equivalentes, ya que se verifican (siempre que $x \to -3$*) las equivalencias*

$$\cos(x+3)-1 \sim -\frac{(x+3)^2}{2}; \qquad \arctan(x+3) \sim (x+3);$$

$$5^{x+3}-1 \sim (x+3)\log(5); \qquad \log(x+4) \sim (x+4-1) = x+3$$

Por ello,

$$\lim_{x\to -3} \frac{(\cos(x+3)-1)\arctan(x+3)}{(5^{x+3}-1)^2\log(x+4)} = \lim_{x\to -3} \frac{-\frac{(x+3)^2}{2}(x+3)}{((x+3)\log(5))^2(x+3)} = -\frac{1}{2\log^2(5)}$$

NOTA: También podríamos haber realizado primero el cambio de variable $y = x+3$*, con lo que el límite se hubiese transformado en*

$$\lim_{x\to -3} \frac{(\cos(x+3)-1)\arctan(x+3)}{(5^{x+3}-1)^2\log(x+4)} = \lim_{y\to 0} \frac{(\cos(y)-1)\arctan(y)}{(5^y-1)^2\log(1+y)}$$

y posiblemente en este caso se ven más claras las equivalencias a aplicar, que son:

$$\cos(y)-1 \sim -\frac{y^2}{2};\ \arctan(y) \sim y;\ 5^y-1 \sim y\log(5);\ \log(1+y) \sim y$$

De esta forma

$$\lim_{y\to 0} \frac{(\cos(y)-1)\arctan(y)}{(5^y-1)^2\log(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{y^2}{2}y}{(y\log(5))^2 y} = -\frac{1}{2\log^2(5)}$$

Sin embargo, en la mayoría de los casos, utilizar equivalencias no nos permitirá resolver de forma directa el límite, sino que esta técnica será útil ya que nos simplifica el mismo y, con posterioridad, aplicaremos otra técnica (por ejemplo, la regla de L'Hôpital) para resolverlo. Lo ilustramos en el siguiente ejemplo:

Example *Para calcular*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin^2(x)-x}{\sin(x^2)}$$

aplicaremos equivalencias en el denominador, ya que $\sin(x^2)\sim x^2$ *cuando* $x\to 0$. *Por tanto el límite quedaría simplificado, resultando*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin^2(x)-x}{\operatorname{sen}(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin^2(x)-x}{x^2}$$

y éste último lo resolveremos más adelante (cuando recordemos la regla de L'Hôpital).

Remark *Notemos que en este último límite NO se pueden aplicar equivalencias en el numerador (a pesar de que se verifica que* $\log(1+x)\sim x$ *y que* $\sin^2(x)\sim x^2$ *(cuando* $x\to 0$*)) puesto que ambas funciones NO están ni multiplicando ni dividiendo en todo el límite (están sumando o restando, y en tal caso no es posible aplicar equivalencias).*

Remark *A partir de las equivalencias anteriores y del principio de sustitución podemos establecer la siguiente igualdad que nos permitirá resolver indeterminaciones del tipo* 1^∞ :

A la hora de resolver cualquier indeterminación del tipo 1^∞, 0^0 *o* ∞^0 *hemos de aplicar la relación*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\exp\left(\lim_{x\to a}g(x)\log(f(x))\right)$$

(a aplicar esta expresión siempre nos queda en el exponente una indeterminación de la forma $\infty\cdot 0$, *que resolveremos como buenamente podamos).*

Sin embargo, cuando se trata de la indeterminación 1^∞ *resulta que al ser* $\lim_{x\to a}(f(x))=1$, *se verificará que* $\log(f(x))\sim f(x)-1$ *(lo hemos establecido anteriormente), por lo que la forma más simple de empezar a resolver la indeterminación* 1^∞ *es utilizar*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\exp\left(\lim_{x\to a}g(x)(f(x)-1)\right)$$

Example *(1er Parcial, enero 2012) Para calcular*

$$\lim_{x\to 1}(2x-2)^{\sin(x-1)}$$

y al ser éste de la forma 0^0, *aplicaremos*

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\log(f(x))}$$

por lo que

$$\lim_{x\to 1}(2x-2)^{\sin(x-1)}=e^{\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\log(2x-2)}$$

Si resolvemos aparte el límite que aparece en el exponente:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\log(2x-2)=\lim_{x\to 1}(x-1)\log(2x-2)=\lim_{x\to 1}\frac{\log(2x-2)}{\frac{1}{(x-1)}}$$

donde en la primera igualdad hemos aplicado la equivalencia $\sin(x-1)\sim(x-1)$

(ya que $x-1$ tiene límite 0 cuando $x \to 1$) y en la segunda igualdad hemos transformado el límite para que nos quede la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicaremos entonces la regla de L'Hôpital para resolverlo.

Example *(1er Parcial - Febrero 2013) Para calcular*

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin(x)-x)}}$$

y al tratarse de una indeterminación de la forma 1^{∞}, aplicaremos

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)(1-f(x))}$$

de manera que

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin(x)-x)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sin(x)-x)}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}-1\right)}$$

Si resolvemos aparte el límite que aparece en el exponente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sin(x)-x)}\left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+\frac{x^2}{2}-1}{x(\sin(x)-x)}$$

que podremos resolver mediante la regla de L'Hôpital o utilizando desarrollos de McLaurin de las correspondientes funciones, como veremos más adelante. En este caso, tampoco es posible utilizar equivalencias ni en el numerador ni en el denominador (al estar las correspondientes funciones sumando o restando).

Exercise *Realizar todos los ejercicios del fichero Ejercicios_Tema1.1.1.pdf y ejercicios resueltos y propuestos incluidos en el fichero ANEXO1.1.1-completo.pdf. Ambos están en Aula Virtual.*

Continuidad. Definiciones.

Como ya hemos establecido, la definición de límite de una función $f(x)$ en un punto a hace referencia al valor que toma la función en un entorno "reducido" del punto a, ya que para nada se necesita el valor que pueda tomar $f(x)$ en a, $f(a)$. Entonces, cuando se verifique que ambos valores coinciden, es decir, si ocurre que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

diremos que $f(x)$ es **continua** en el punto a.

Aunque el concepto de continuidad nuevamente es de carácter local, puede extenderse a funciones continuas en todo un conjunto (por ejemplo, un intervalo). De esta forma, se dice que $f(x)$ es continua en todo un conjunto I (donde la función está definida), si es continua en todos los puntos de I.

Cuando una función no es continua en un punto a, se dice que es **discontinua** en ese punto. Como es conocido, las discontinuidades que presenta cualquier función pueden clasificarse en 3 tipos:

- **Discontinuidad evitable**: Ocurre cuando existe y es finito el valor de $f(a)$ y también existe, y es finito, el valor de $\lim_{x\to a} f(x)$, pero se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.
- **Discontinuidad de salto** (**o 1ra especie**): Se da cuando $\lim_{x\to a+} f(x)$ y $\lim_{x\to a-} f(x)$ no coinciden (incluso pueden tomar cualquiera de ellos el valor ∞). Precisamente, se llama **salto** de la función en el punto a al resultado

$$\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$$

pudiendo ser este salto finito o infinito.

- **Discontinuidad de 2da especie**: Es la que se produce cuando no existe uno (o ambos) de los límites laterales.

Operaciones con funciones contínuas.

Proposition *Sean* $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en el punto* a. *Entonces se verifica:*

a) La función $f \pm g$ *es continua en* a.

b) La función producto $f \cdot g$ *es continua en* a.

c) La función cociente $\frac{f}{g}$ *es continua en* a, *siempre que* $g(a) \neq 0$.

d) (Continuidad de la función compuesta) Si existe la función compuesta $g \circ f$, *se verifica que esta función compuesta es continua en* a.

e) (Continuidad de la función inversa) Si la función f *admite función inversa, esta inversa* f^{-1} *es continua en el punto* $f^{-1}(a)$.

Propiedades de las funciones continuas en intervalos compactos.

Hasta el momento se han establecido las principales propiedades y operaciones que verifican las funciones continuas en un punto a, es decir, propiedades "locales". También son de destacar las propiedades "globales" que verifican las funciones que son continuas en todo un intervalo cerrado y acotado (**compacto**), de la forma $I = [a, b]$. Éstas son propiedades que suelen utilizarse en demostraciones teóricas, aunque todas tienen su utilidad práctica:

Theorem *(Bolzano) Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *función continua en todo el intervalo y que toma valores de signo opuesto en los extremos del mismo (es decir,* $f(a) \cdot f(b) < 0$*). Entonces existe al menos un punto* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Theorem *(Weierstrass) Toda* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en todo el intervalo, está acotada superior e inferiormente, y existen dos puntos* $x', x'' \in [a, b]$ *tal que en ellos la función alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos, es decir*

$$f(x') = \max\{f(x);\ x \in [a, b]\} \text{ y } f(x'') = \min\{f(x);\ x \in [a, b]\}$$

Theorem *(Valores intermedios o de Darboux) Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *función continua en todo el intervalo y sea* k *un valor comprendido entre* $f(a)$ *y* $f(b)$. *Entonces existe al menos un punto* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = k$.

Ejercicios propuestos.

Ver ejercicios en ficheros (del Aula Virtual) Ejercicios_Tema1.1.1.pdf y ANEXO1.1.1-completo.pdf. También se pueden realizar algunos de los ejercicios del fichero Ejercicios tema1.1.2y3.pdf, incluido en el tema 1.1.3.