Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A
2do Parcial. Curso 2012/2013 (30/05/2013)
**ENUNCIADO Y RESUELTO**

1. $\left[2\ puntos\right]$ **Sea** $f(x)$ **la función definida por**

$$f(x) = \frac{4x}{x^4+1}$$

1.a $\left[1\ p.\right]$ **Calcular la integral**

$$\int f(x)dx$$

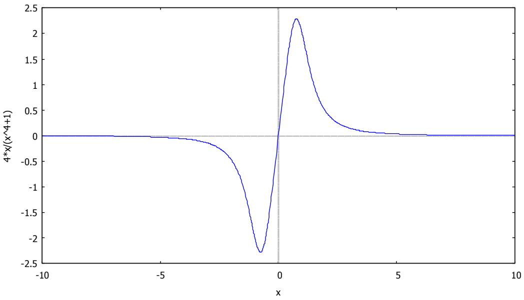
1.b $\left[1\ p.\right]$ **Hallar, razonadamente, el área comprendida entre la curva** $f(x)$ **y el eje** $X$**.**

**Solución:** Calcular la integral es inmediato si observamos que

$$\int f(x)dx = \int \frac{4x}{x^4+1}dx = 2\int \frac{2x}{\left(x^2\right)^2+1}dx = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan(t)+cte =$$

$$= 2\arctan(x^2)+cte$$

Además, como la representación gráfica de la curva viene dada por




(notemos que se trata de una curva impar, y que tiene al eje $X$ como asíntota horizontal), el área pedida será

$$Area = 2\int_0^{+\infty} \frac{4x}{x^4+1}dx = \left[4\arctan(x^2)\right]_0^{+\infty} = 4\arctan(+\infty) - 4\arctan(0) =$$

$$= 4\frac{\pi}{2} - 0 = 2\pi$$

-----------------------------------

2. $\left[2\ puntos\right]$ **Hallar los extremos absolutos que alcanza la función**

$$f(x,y) = x^2y+y^3-2xy$$

**en el conjunto compacto**

$$K = \left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2-2x \leq 0\right\}$$

**Solución:** El conjunto $K$ coincide con el círculo $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, es decir, el círculo de centro $(1,0)$ y de radio 1.

Inicialmente calculamos los puntos críticos de $f(x,y)$ que están en el interior del círculo: Resolviendo

$$\left\{\begin{array}{r} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 2x = 0 \end{array}\right.$$

De la 1ª ecuación resulta que $y = 0$ ó $x = 1$. Si $y = 0$, en la 2ª ec. se obtiene $x = 0$ ó 2; si $x = 1$, resulta $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Por tanto tenemos los puntos críticos $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $D\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Los puntos que están en el interior de $K$ son $C$ y $D$ ($A$ y $B$ están en el borde).

Ahora obtendremos los posibles puntos candidatos en la **frontera del recinto**: No es preciso aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para evaluar lo que vale $f$ en la frontera de $K$, ya que se verifica que

$$f(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy = y(x^2 + y^2 - 2x)$$

y como la frontera viene dada por los puntos tales que $x^2 + y^2 - 2x = 0$, resulta que $f$ en cualquier punto de la frontera de $K$ vale siempre 0 (por lo que también valdrá 0 en cualquier punto que podamos haber obtenido mediante multiplicadores de Lagrange, como hemos visto con los puntos $A(0,0)$ y $B(2,0)$). No obstante, veamos que se obtiene este mismo resultado si aplicamos multiplicadores:

Se trata de hallar los puntos críticos de la función

$$F(x,y) = x^2y + y^3 - 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2x)$$

Hemos de resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy - 2y + 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - 2x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{array}\right.$$

La 1ª ec puede ponerse como

$$xy - y + \lambda(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)y + \lambda(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(y+\lambda) = 0$$

por lo que o $x = 1$ o $\lambda = -y$.

Si tomamos $x = 1$, de la 3ª ec. resulta que $y = \pm 1$, por lo que hemos obtenido los puntos críticos $E(1,1)$ y $F(1,-1)$.

Si tomamos $\lambda = -y$ e igualamos con el valor de $\lambda$ que se obtiene al despejar en la segunda ecuación, al simplificar resulta

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

que coincide con la 3ª ec. Por tanto, en este caso serán críticos todos los puntos que cumplan esta última condición, es decir todos los puntos que están en el círcunferencia frontera de $K$.

Evaluando $f$ en todos los puntos obtenidos, resulta ser

$$f(A) = 0;\ f(B) = 0;\ f(C) = \frac{-2}{3\sqrt{3}};\ f(D) = \frac{2}{3\sqrt{3}};\ f(E) = 0;\ f(F) = 0$$

por lo que el mínimo absoluto se alcanza en $C$ y el máximo en $D$.

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

3. $\left[2\ puntos\right]$ **Resolver:**

3.a $\left[0.5\ p.\ \right]$ **Si** $z = 2x^2 - 3y^3$**, con** $x = u+v+w$ **y** $y = u^2v^2w^2$, **calcular** $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, **y** $\frac{\partial z}{\partial w}$.

3.b $\left[1.5\ p.\ \right]$ **Suponiendo que las ecuaciones**

$$\begin{cases} u+2v-x^2+y^2 = 0 \\ 2u-v-2xy = 0 \end{cases}$$

**definen a las variables** $u$, $v$ **como funciones implícitas de** $x$ **e** $y$ **en las proximidades de un adecuado punto, calcular** $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ **y** $\frac{\partial v}{\partial y}$.

**Solución:**

(3.a) Podemos sustituir directamente en $z$ para obtener una función que depende de $u,v,w$ :

$$z = 2x^2 - 3y^3 = 2(u+v+w)^2 - 3(u^2v^2w^2)^2$$

y por tanto, si derivamos directamente

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2uv^2w^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2vu^2w^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2wu^2v^2$$

También podíamos haber aplicado la regla de la cadena, de manera que al ser $z = z(x,y) = z(x(u,v,w),y(u,v,w))$, se tendrá

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 4x \cdot 1 - 6y^2 \cdot 2uv^2w^2 = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2uv^2w^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 4x \cdot 1 - 6y^2 \cdot 2vu^2w^2 = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2vu^2w^2$$
$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = 4x \cdot 1 - 6y^2 \cdot 2wu^2v^2 = 4(u+v+w) - 6(u^2v^2w^2)2wu^2v^2$$

(3.b) Como se tiene el sistema

$$\begin{cases} u(x,y)+2v(x,y)-x^2+y^2 = 0 \\ 2u(x,y)-v(x,y)-2xy = 0 \end{cases}$$

si derivamos ambas ecuaciones respecto de $x$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} - 2x = 0 \\ 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} - 2y = 0 \end{cases}$$

de donde despejando $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$, se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x+4y}{5};\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4x-2y}{5}$$

De igual forma, si derivamos ambas ecuaciones respecto de $y$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} - 2y = 0 \\ 2\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} - 2x = 0 \end{cases}$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4x+2y}{5};\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4y-2x}{5}$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

4. $\left[2\ puntos\right]$ **Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones**

$$x^2 + y^2 = 4; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 16; \qquad z = 0$$

**Solución:** El volumen a calcular es el del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, que tiene por tapa la correspondiente porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Así

$$Vol = \iiint_V dxdydz$$

y si realizamos un cambio a coordenadas cilíndrincas, tendremos (la proyección sobre el plano $XY$ es el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$)

$$0 \leq r \leq 2;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi;\ 0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2};\ \text{siendo } J = r$$

Entonces

$$Vol = \iiint_V dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_0^{\sqrt{16-r^2}} rdz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\sqrt{16 - r^2}\, dr = \ldots$$

$$= 2\pi\left(\frac{64}{3} - 8\sqrt{3}\right)$$

(donde la integral respecto de $r$ es inmediata y vale $-\frac{1}{3}\sqrt{(16 - r^2)^3}$ ).

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

5. $\left[2\ puntos\right]$ **Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:**

$$a) \qquad xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$b) \qquad y'' - 2y' + y = e^x + 3$$

Solución:

(5.a) La primera se puede escribir en la forma

$$\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0$$

y se trata de una edo homogénea (ya que las funciones $M(x,y) = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ y $N(x,y) = -x$ son homogéneas de grado 1). Por tanto realizaremos el cambio dado por

$$y = vx;\ dy = vdx + xdv$$

Sustituyendo,

$$\left(vx + \sqrt{x^2 - v^2x^2}\right)dx - x(vdx + xdv) = 0$$

y operando

$$x\sqrt{1 - v^2}\, dx = x^2dv$$

por lo que se obtiene la edo en variables separadas

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

e integrando en ambos miembros

$$\log(x) = \arcsin(v) + cte$$

o lo que es lo mismo

$$\log(x) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) + cte$$

(5.b) La edo lineal de 2º orden y homogénea, tiene por solución general

$$y_{GH} = c_1 e^x + c_2 x e^x = (c_1 + c_2 x) e^x$$

(puesto que la única raíz de la ec. característica $r^2 - 2r + 1 = 0$, es $r_1 = 1$, doble).

Al ser el término no homogéneo $e^x + 3,$ inicialmente podemos tomar como solución particular de la ec. no homogénea la dada por

$$y_{PNH} = Ae^x + B$$

pero observamos que hay repetición con alguno de los términos que aparecen en $y_{GH}$ (el término $e^x$). Lo mismo ocurriría si tomásemos

$$y_{PNH} = Axe^x + B$$

(el término $xe^x$). Por tal motivo, tomaremos

$$y_{PNH} = Ax^2 e^x + B$$

Si sustituimos esta expresión en la edo inicial $(y'' - 2y' + y = e^x + 3),$ simplificando se llega a

$$2Ae^x + B = e^x + 3$$

de donde $A = \frac{1}{2}$ y $B = 3$.

De esta forma, la solución general de la edo dada es

$$y_{GNH} = y_{GH} + y_{PNH} = (c_1 + c_2 x) e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + 3$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – – –