Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A
2^{o} Parcial 2011 / 2012
(7 de junio de 2012)
ENUNCIADO Y RESUELTO

PROBLEMA 1. Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = x \cdot y^2$$

en el conjunto compacto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq -5/3\right\}$$

SOLUCIÓN:

- Calcularemos primero los puntos críticos de f en el interior de D: si resolvemos
$$f_x = y^2 = 0;\ f_y = 2xy = 0$$
obtenemos como soluciones el punto $A(0,0)$ pero también cualquier punto de la forma $B(x,0)$ (estos puntos aparecen representados en rojo en la figura siguiente)
- Calcularemos ahora los puntos críticos en la frontera de D: En primer lugar lo haremos en la parte de dicha frontera que corresponde a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$: Como $f(x,y) = xy^2$, si sustituimos la ec. de la circunferencia en esta f, se tendrá
$$f(x) = x(4 - x^2) = 4x - x^3$$
que tiene por puntos críticos (se tiene que $f'(x) = 4 - 3x^2 = 0$, con lo que $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$):
$$C\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right),\ D\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{8}}{3}\right),\ E\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right),\ F\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$$
Además, en la parte de la figura que corresponde a la recta $x = -5/3$, se tiene
$$f(x,y) = xy^2 = -\frac{5}{3}y^2$$
que tiene como punto crítico $y = 0$ (siendo $x = -5/3$). Notemos que este punto ya está contemplado en los puntos $B(x,0)$.
- Si calculamos los puntos intersección de la circunferencia y la recta, obtenemos
$$G\left(-\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{11}}{3}\right) \text{ y } H\left(-\frac{5}{3}, -\frac{\sqrt{11}}{3}\right)$$
.
- Si evaluamos f en todos los puntos hallados, resulta que el máximo se encuentra en C y D (siendo $f(C) = f(D) = 3,0792$), mientras que el mínimo se encuentra en G y H (siendo $f(G) = f(H) = -6,1111$)

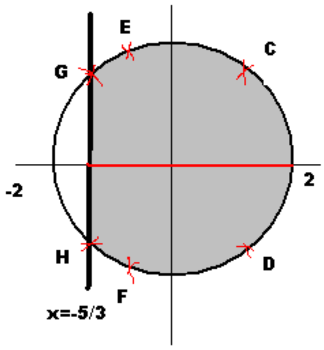


Figura Problema 1

– –

PROBLEMA 2. **Sean** $f : R^3 \to R^3$ **y** $g : R^3 \to R^2$ **funciones definidas por**

$$f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2,\ x \cdot y \cdot z,\ z^2 - x^2\right)$$

$$g(u,v,w) = \left(\cos(u+w),\ e^v\right)$$

Calcular la matriz jacobiana de $g \circ f$ **en el punto** $(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

SOLUCIÓN: La función $g \circ f : R^3 \to R^2$, por lo que su matriz jacobiana será de dimensiones 2×3. Podríamos calcular previamente la expresión de la composición $g \circ f$ (aplicando que $(g \circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z))$) y con posterioridad derivar el resultado. Sin embargo, usando la regla de la cadena para estas transformaciones, calcularemos previamente las matrices jacobianas de f y g, y usaremos que

$$J(g \circ f)(x,y,z) = J(g(f(x,y,z))) \times J(f(x,y,z))$$

De esta forma

$$J(g \circ f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin(u+w) & 0 & -\sin(u+w) \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

y si particularizamos en el punto $(x,y,z) = (0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ (siendo $(u,v,w) = f(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = (\pi, 0, \pi)$)

$$J(g \circ f)(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \begin{pmatrix} -\sin(\pi+\pi) & 0 & -\sin(\pi+\pi) \\ 0 & e^0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\pi} & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

de donde

$$J(g \circ f)(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– –

PROBLEMA 3. Estudiar si el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x \cdot y + x \cdot y \cdot z + z = 1 \\ x \cdot y \cdot z = 0 \end{array}\right\}$$

define a $y,\ z$ **como funciones implícitas de** x **en un entorno del punto** $(1,0,1)$**. Calcular** $y'(1),\ z'(1)$.

SOLUCIÓN: Si denotamos

$$\Phi_1(x,y,z) = x \cdot y + x \cdot y \cdot z + z - 1 = 0$$
$$\Phi_2(x,y,z) = x \cdot y \cdot z = 0$$

por el teorema de la función implícita, para que efectivamente este sistema defina a $y,\ z$ como funciones implícitas de x en un entorno del punto $(1,0,1)$ se tiene que verificar que

$$\Phi_1(1,0,1) = \Phi_2(1,0,1) = 0$$

lo que es evidente, y que

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(y,z)}(1,0,1) \neq 0$$

lo cual también se verifica, ya que

$$\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(y,z)}(1,0,1) = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \end{array}\right|_{(1,0,1)} = \left|\begin{array}{cc} x+xz & xy+1 \\ xz & xy \end{array}\right|_{(1,0,1)} = \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| \neq 0$$

Por lo tanto, podemos considerar el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x \cdot y(x) + x \cdot y(x) \cdot z(x) + z(x) = 1 \\ x \cdot y(x) \cdot z(x) = 0 \end{array}\right\}$$

que si derivamos respecto de x, nos dará un sistema de 2 ec. con 2 incógnitas $y',\ z'$:

$$\left.\begin{array}{c} y + xy' + yz + xy'z + xyz' + z' = 0 \\ yz + xy'z + xyz' = 0 \end{array}\right\}$$

Antes de despejar $y',\ z'$ vamos a particularizar el sistema en el punto $(1,0,1)$:

$$\left.\begin{array}{c} 0 + 1y'(1) + 0 + 1y'(1)1 + 0 + z'(1) = 0 \\ 0 + 1y'(1)1 + 0 = 0 \end{array}\right\}$$

por lo que $y'(1) = 0,\ z'(1) = 0$.

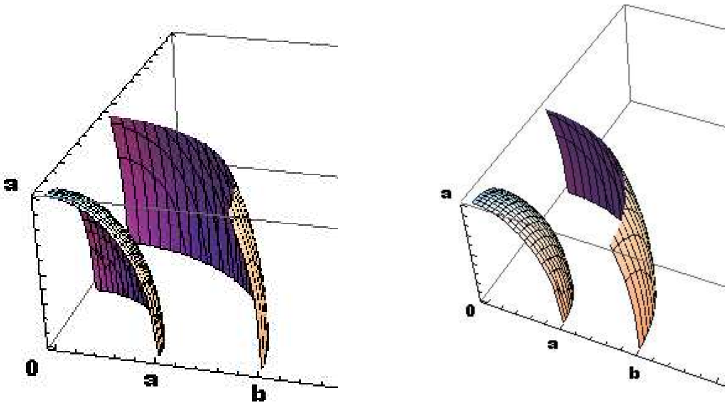
– –

PROBLEMA 4. Calcular, usando integración triple, el volumen del sólido comprendido entre dos esferas concéntricas de radios a **y** b**, siendo** $0 < a < b$**.**

SOLUCIÓN: Por la simetría del problema nos reduciremos al 1er octante (y multiplicaremos el volumen por 8). Así

$$Vol = 8 \iiint_V dxdydz$$

siendo V la región, en el 1er octante, comprendida entre ambas esferas (un par de perspectivas de dicha región son las que aparecen en la figura siguiente).



Vamos a calcular esta integral mediante un cambio a coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), resultando que para la región considerada se tiene

$$a < r < b;\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2};\ 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

mientras que el jacobiano del cambio viene dado por

$$J = r^2 \sin\phi$$

Así

$$Vol = 8 \iiint_V dxdydz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^b r^2 \sin\phi \cdot dr = \ldots = \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)$$

_ _

PROBLEMA 5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(a) \qquad \left(x + y \cdot e^{\frac{y}{x}}\right)dx - x \cdot e^{\frac{y}{x}} dy = 0$$

$$(b) \qquad \left.\begin{array}{c} x'' + 3x' + 2x = e^{-t} + \sin t \\ x(0) = 0,05;\ x'(0) = 0 \end{array}\right\}$$

SOLUCIÓN:

(a) Se trata de una edo homogénea (todas las funciones que aparecen son homogéneas de grado 1). Así, si realizamos el cambio $y = v \cdot x$ resultará una edo en variables separadas:

Si $y = v \cdot x$ entonces $dy = xdv + vdx$, por lo que si sustituimos en la edo original

$$(x + v \cdot x \cdot e^{\frac{v \cdot x}{x}})dx - x \cdot e^{\frac{v \cdot x}{x}}(xdv + vdx) = 0$$

de donde se obtiene

$$xdx - x^2 e^v dv = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dx}{x} = e^v dv$$

Integrando ambos miembros

$$\log x = e^v + C$$

y deshaciendo el cambio resulta que la solución general de la edo viene dada por

$$\log x = e^{\frac{y}{x}} + C$$

(b) Se trata de una edo lineal de 2do orden, de coeficientes constantes y no homogénea, por lo que su solución general vendrá dada por

$$x_{GNH} = x_{GH} + x_{PNH}$$

La solución general de la ecuación homogénea viene dada por (al ser las raíces de la ecuación característica asociada $r_1 = -1,\ r_2 = -2$):

$$x_{GH} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

Como la parte no homogénea es $f(t) = e^{-t} + \sin t$, probaremos para la solución particular de dicha ecuación una expresión de la forma

$$x_{PNH} = A \cdot t \cdot e^{-t} + B \sin t + C \cos t$$

Sustituyendo esta expresión en $x'' + 3x' + 2x = e^{-t} + \sin t,$ e igualando los respectivos términos, se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{cc} (\text{coef } e^{-t}) & -2A + 3A = 1 \\ (\text{coef } t \cdot e^{-t}) & A + 2A - 3A = 0 \\ (\text{coef } \sin t) & -B - 3C + 2B = 1 \\ (\text{coef } \cos t) & -C + 3B + 2C = 0 \end{array}\right\}$$

por lo que $A = 1,\ B = \frac{1}{10},\ C = \frac{-3}{10}.$ Así,

$$x_{GNH} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + t \cdot e^{-t} + \frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t$$

De la condición inicial $x(0) = 0,05$ resulta

$$C_1 + C_2 - \frac{3}{10} = 0,05$$

y de $x'(0) = 0$ se obtiene

$$- C_1 - 2C_2 + 1 + \frac{1}{10} = 0$$

siendo por tanto $C_1 = -0,4,\ C_2 = 0,75.$

Así, la solución del PVI dado es

$$x_{GNH} = -0,4 \cdot e^{-t} + 0,75 \cdot e^{-2t} + t \cdot e^{-t} + \frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t$$