Asignatura: MATEMÁTICAS I
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A
1er Parcial. Curso 2013/2014
(08/02/2014)

1. $\left[2\ \textit{puntos}\right]$ **Sea** $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ **una aplicación lineal que verifica:**
   $f(\mathbf{s})=2s$ **para todo** s **de** S, **siendo**
$$S=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2x-y+t=0,\ 4z-t=0\right\}$$
   $f(\mathbf{t})=-t$ **para todo** t **de** T, **siendo**
$$T=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : t=0,\ x+y+z=0\right\}$$
   Calcular:
   1.a **La matriz de** f **respecto de las bases canónicas.** $\left[\ p.\ \right]$
   1.b **La dimensión y las ecuaciones del núcleo y de la imagen de** f. **¿Qué tipo de aplicación es?** $\left[\ p.\ \right]$
   1.c **La matriz de** f **respecto de las base** B **en el conjunto inicial y la canónica en el final, siendo**
$$B=\{(1,0,1,0),(0,1,0,2),(-1,0,0,1),(1,1,0,-1)\}$$
   $\left[\ p.\ \right]$

SOLUCIÓN:
(1.a) Buscamos una matriz de la forma
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4\end{pmatrix}$$
que ha de cumplir una serie de condiciones. Como se tiene que
$$S=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2x-y+t=0,\ 4z-t=0\right\}=$$
$$=\left\{(x,y,z,t) : t=4z,\ y=2x+4z\right\}=\{(x,2x+4z,z,4z)\}=$$
$$=<(1,2,0,0),(0,4,1,4)>$$
y
$$T=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : t=0,\ x+y+z=0\right\}=\{(x,y,-x-y,0)\}=$$
$$=<(1,0,-1,0),(0,1,-1,0)>$$
por las condiciones del enunciado ($f(\mathbf{s})=2\mathbf{s}$ para todo $\mathbf{s}$ de S; $f(\mathbf{t})=-\mathbf{t}$ para todo $\mathbf{t}$ de T), habrá de ser
$$A\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix}0\\4\\1\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\4\\1\\4\end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix};\ A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$
Resolviendo estos sistemas de ecuaciones se llega a que

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -5/4 \\ 2 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1.b) Como el $rango(A)=4$ (observamos que si permutamos las filas 1 y 2, la matriz es triangular superior, por lo que es inmediato calcular su rango o su determinante), resulta que $dimIm(f)=4$, es decir $Im(f)=\mathbb{R}^4$, por lo que f será suprayectiva. Además podemos asegurar que $dimker(f)=0$, por lo que f será también inyectiva (no es preciso calcular $ker(f)$, ya que al tener dimensión 0, obligatoriamente $ker(f)=\{(0,0,0,0)\}$).

(1.c) En este caso se trata de usar el siguiente esquema (solo hay que realizar un cambio de base en el conjunto inicial):

$$\underset{B}{\mathbb{R}^4} -- > \underset{C}{\mathbb{R}^4} \to \underset{C}{\mathbb{R}^4}$$

por lo que la nueva matriz pedida será

$$M_{B,C}(f)=M_{C,C}(f)\times M_{B,C}=A\times M_{B,C}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -5/4 \\ 2 & 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ 4 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

_ _

2. $[2\ puntos]$ **Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es**

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{m} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

2.a **Estudiar para qué valores de m es f diagonalizable.** $[\ p.\ ]$

2.b **Sea $m=1$. Hallar una matriz diagonal D y una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz de f sea D.** $[\ p.\ ]$

2.c **Para $m=1$, calcular A^{100} .** $[\ p.\ ]$

SOLUCIÓN:

(2.a) Los valores propios de la matriz A vienen dados por

$$|A-\lambda Id| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{m}-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

de donde se obtienen las raíces $\lambda_1 = \mathbf{m}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$ Por lo tanto, si $\mathbf{m} \neq \{1,-1\}$, se tendrá que A es diagonalizable (al tener 3 valores propios reales distintos). Veamos que ocurre si $\mathbf{m}$ vale 1 o -1 :

- Si $\mathbf{m} = 1$: Se trata de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por valores propios $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = -1.$ Si calculamos sus subespacios vectoriales propios asociados:

$$S_1 = \left\{ (x,y,z)\ :\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(x,y,2x-y)\} =$$

$$= <(1,0,2),(0,1,-1)>$$

mientras que

$$S_{-1} = \left\{ (x,y,z)\ :\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(0,y,y)\} = <(0,1,1)>$$

Por tanto, la matriz es diagonalizable en este caso.

- Si $\mathbf{m} = -1$: Se trata de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por valores propios $\lambda_1 = -1$ (doble) y $\lambda_2 = 1.$ Si calculamos sus subespacios vectoriales propios asociados:

$$S_{-1} = \left\{ (x,y,z)\ :\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ldots = \{(0,0,z)\} =$$

$$= <(0,0,1)>$$

por lo que la matriz no será diagonalizable.

(2.b) En el apartado anterior tenemos realizados todos los cálculos que nos piden (se trata del caso $\mathbf{m} = 1$), por lo que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.c) Se verifica

$$A^{100} = (P \cdot D \cdot P^{-1})^{100} = P \cdot D^{100} \cdot P^{-1} = P \cdot Id \cdot P^{-1} = Id$$

– –

3. $\left[2 \text{ } puntos\right]$ **En** $\mathbb{R}^3$ **se considera el producto escalar definido por**

$$(x,y,z) \cdot (x',y',z') = xx' + 5yy' + 2zz'$$

y los subespacios vectoriales

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + y = 0\right\} \quad \text{y} \quad W =< (1,-1,0) >$$

Con esta definición, se pide:

3.a **Dada la base canónica de** $\mathbb{R}^3$**, hallar una base ortonormal.**

3.b **Calcular una base ortonormal de los subespacios** $U^\perp$ **y** $W^\perp$**.**

3.c **Calcular** $U \cap W$ **y** $U^\perp + W^\perp$ $\left[\ p.\ \right]$

3.d **Determinar la proyección ortogonal del vector** $(1,2,1)$ **sobre** U. $\left[\ p.\ \right]$

SOLUCIÓN:

(3.a) Con el nuevo producto escalar que nos dan, está claro que los 3 vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales (el producto escalar de dos cualesquiera de ellos, usando el producto escalar del enunciado, siempre da 0). Lo único que necesitamos es de asegurarnos si los vectores son unitarios:

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{(1,0,0) \cdot (1,0,0)} = 1$$
$$\|(0,1,0)\| = \sqrt{(0,1,0) \cdot (0,1,0)} = \sqrt{5}$$
$$\|(0,0,1)\| = \sqrt{(0,0,1) \cdot (0,0,1)} = \sqrt{2}$$

Por tanto, la base ortonormal pedida será

$$\left\{(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1)\right\}$$

(3.b) Se tiene que

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + y = 0\right\} = \{(x,-2x,z)\} =< (1,-2,0),(0,0,1) >$$

por lo que

$$(x,y,z) \in U^\perp \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \cdot (1,-2,0) = 0 \\ (x,y,z) \cdot (0,0,1) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 10y = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right.$$

de donde

$$U^\perp = \{(10y,y,0)\} =< (10,1,0) >$$

mientras que

$$(x,y,z) \in W^{\perp} \Leftrightarrow (x,y,z) \bullet (1,-1,0) = 0 \Leftrightarrow x - 5y = 0$$

de donde

$$W^{\perp} = \{(5y,y,z)\} =< (5,1,0),(0,0,1) >$$

De esta forma, una base ortonormal para $U^{\perp}$ viene dada por

$$U^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{105}} < (10,1,0) >$$

(puesto que el módulo del vector $(10,1,0)$ es $\|(10,1,0)\| = \sqrt{(10,1,0) \bullet (10,1,0)} = \sqrt{105}$), mientras que para hallar la base ortonormal de $W^{\perp}$ tendremos que usar las 2 primeras ecuaciones del método de Gram-Schmitd:

$$u_1 = e_1 = (5,1,0)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \bullet e_2}{u_1 \bullet u_1} u_1 = (0,0,1) - \frac{(5,1,0) \bullet (0,0,1)}{(5,1,0) \bullet (5,1,0)}(5,1,0) = (0,0,1)$$

Notemos que se obtienen los dos mismos vectores de $W^{\perp}$ (Nota: No sería preciso usar las ecuaciones del método de G-S si observamos desde el principio que los dos vectores de la base de $W^{\perp}$ ya son ortogonales - inclusive con el producto escalar definido en el enunciado). Por tanto, para hallar la base ortonormal de $W^{\perp}$ solo hemos de dividir cada vector por su módulo:

$$\|(5,1,0)\| = \sqrt{(5,1,0) \bullet (5,1,0)} = \sqrt{30}$$

$$\|(0,0,1)\| = \sqrt{(0,0,1) \bullet (0,0,1)} = 1$$

y la base ortonormal sería

$$W^{\perp} =< \frac{1}{\sqrt{30}}(5,1,0),(0,0,1) >$$

(3.c) Se tiene que

$$(x,y,z) \in U \cap W \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) \in U \\ (x,y,z) \in W \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z) = \alpha(1,-2,0) + \beta(0,0,1) \\ (x,y,z) = \gamma(1,-1,0) \end{array} \right.$$

y resolviendo este sistema se tendría que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por lo que $U \cap W = \{(0,0,0)\}$.

De forma análoga podemos actuar para hallar $U^{\perp} + W^{\perp}$: Sabemos que $U^{\perp} + W^{\perp} =< (10,1,0),(5,1,0),(0,0,1) >$, y puesto que estos 3 vectores son lin. independientes, resulta que $U^{\perp} + W^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

(3.d) Se trata de expresar $(1,2,1) = u + w$, con $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$. Así, será

$$(1,2,1) = u + w = \alpha(1,-2,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(10,1,0)$$

y para determinar estos coeficientes multiplicaremos escalarmente esta igualdad por los vectores de U (para lo que usaremos la definición de producto escalar dada en el enunciado):

$$(1,2,1) \bullet (1,-2,0) = \alpha(1,-2,0) \bullet (1,-2,0) + \beta(0,0,1) \bullet (1,-2,0) + \gamma(10,1,0) \bullet (1,-2,0)$$

$$(1,2,1) \bullet (0,0,1) = \alpha(1,-2,0) \bullet (0,0,1) + \beta(0,0,1) \bullet (0,0,1) + \gamma(10,1,0) \bullet (0,0,1)$$

de donde

$$-19 = 21\alpha$$

$$2 = 2\beta$$

Por lo tanto la proyección ortogonal pedida será

$$u = \alpha(1,-2,0) + \beta(0,0,1) = \frac{-19}{21}(1,-2,0) + 1(0,0,1) = \begin{pmatrix} -\frac{19}{21} & \frac{38}{21} & 1 \end{pmatrix}$$

– –

4. $\left[2\ \textit{puntos}\right]$ **Resolver UNO de los DOS apartados siguientes:**

4.a **Un empresario posee 85 hectáreas de terreno para cultivar dos tipos de plantas de café. La primera variedad tiene un rendimiento de 9600 euros/hectárea, pero necesita 3 horas/hectárea de uso de maquinaria y 80 horas/hectárea de mano de obra. Además, el Estado limita su explotación a 30 hectáreas por plantación. La segunda variedad produce un rendimiento de 7500 euros/hectárea y utiliza 2 horas/hectáreade uso de maquinaria y 60 horas/hectárea de mano de obra.**
La cooperativa local le ha asignado 190 horas de uso de maquinaria, pero sólo se disponde de 5420 horas de mano de obra, a 12 euros/hora.
¿Cuántas hectáreas debe dedicar a cada variedad de café si quiere maximizar el beneficio obtenido? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? Plantear este problema como un problema de Programación Lineal y resolverlo.

4.b **Usando adecuados desarrollos de McLaurin, calcular los límites:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^2\sin x}$$

SOLUCIÓN:

(4.a) Si denotamos por x al nro de hras del café 1, y por y al del café 2, tendremos que la función objetivo a maximizar viene dada por

$$f(x,y) = 9600x + 7500y$$

con las siguientes restricciones

$$\begin{cases} x + y \leq 85 \text{ (debido al nº de hectáreas que disponemos)} \\ x \leq 30 \text{ (debido a que no se pueden disponer mas de 30 hectáreas de café 1)} \\ 3x + 2y \leq 190 \text{ (debido a las horas de maquinaria)} \\ 80x + 60y \leq 5420 \text{ (horas de mano de obra empleadas)} \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Tenemos que representar esta región factible y evaluar f en los vértices de la misma. Nos quedaremos con aquel vértice que nos de el máximo valor de f.

(4.b) El primero se trata de una indeterminación de la forma 1^∞, por lo que para resolverla usaremos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\sin x}{x} - 1\right]\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\sin x - x}{x}\right]\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right] - x}{x^3}\right) = \exp\left(-\frac{1}{3!}\right) = e^{-1/6}$$

El segundo es de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que si sustituimos cada función por su correspondiente desarrollo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left[1-\frac{x^2}{2!}+\ldots\right]-\left[x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right]}{2x^2\left[x-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right]} = \frac{-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}}{2} = -\frac{1}{6}$$

ya que el coeficiente de x^3 (que es el menor de los que quedan en el numerador y denominador) es $-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$ en el numerador y 2 en el denominador.

– –

5. $\left[1 \textit{ punto cada apartado}\right]$ **Resolver DOS de los TRES apartados siguientes:**

5.a **Hallar el valor de** c **para que la función**

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+\mathbf{c}}$$

tenga un único extremo relativo. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

5.b **Encontrar constantes** a **y** b **de forma que**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\mathbf{a}x-\mathbf{b}\right) = 1$$

5.c **Calcular el polinomio de McLaurin de grado** 3 **para** $f(x) = \sqrt[3]{1+3x}$ **y obtener una cota del error cometido cuando el valor de** $\sqrt[3]{1,3}$ **se aproxima usando dicho polinomio.**

SOLUCIÓN:

(5.a) Calculamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+\mathbf{c})-e^{-x}2x}{(x^2+\mathbf{c})^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+\mathbf{c}+2x = 0$$

y como queremos que solo haya un extremo relativo, esta ecuación solo puede tener una sola solución, por lo que necesariamente $\mathbf{c} = \mathbf{1}$. Para ver que tipo de extremo relativo tiene la función, y puesto que su derivada es

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+\mathbf{1})-e^{-x}2x}{(x^2+\mathbf{1})^2} = \frac{-e^{-x}(x+\mathbf{1})^2}{(x^2+\mathbf{1})^2}$$

resulta que la función tiene por único punto crítico el punto $x = -1$, siendo además $f'(x) < 0$ para cualquier valor de x; esto quiere decir que la función siempre es decreciente, por lo que en $x = -1$ no puede haber ni máximo ni mínimo, sino que hay un punto de inflexión.

(5.b) Si calculamos el límite e igualamos a 1:

$$1 = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\mathbf{a}x-\mathbf{b}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\mathbf{a}x-\mathbf{b}\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+(\mathbf{a}x+\mathbf{b})\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+(\mathbf{a}x+\mathbf{b})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x+1)-(\mathbf{a}x+\mathbf{b})^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(\mathbf{a}x+\mathbf{b})} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(1-2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(\mathbf{a}x+\mathbf{b})}$$

y para que este resultado sea finito e igual a 1, tiene que ser $1-a^2 = 0$ (para que así el numerador y denominador sean del mismo grado), siendo además $\frac{1-2ab}{1+a} = 1$ (el cociente de los coeficientes de grado 1 nos da el valor del límite). Por tanto, ha de ser $a = 1$ (no puede ser -1 ya que se anularía el denominador de la fracción), mientras que $b = -1/2$.

(5.c) Se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{1+3x};\ f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{3}(1+3x)^{-2/3}3;\ f'(0) = 1 \\ f''(x) &= \frac{-2}{3}(1+3x)^{-5/3}3;\ f''(0) = -2 \\ f'''(x) &= \frac{10}{3}(1+3x)^{-8/3}3;\ f'''(0) = 10 \\ f^{IV}(x) &= \frac{-80}{3}(1+3x)^{-11/3}3;\ f^{IV}(c) = -80(1+3c)^{-11/3} \end{aligned}$$

por tanto si usamos

$$\sqrt[3]{1+3x} = 1 + 1x + \frac{-2}{2!}x^2 + \frac{10}{3!}x^3 + R$$

tendremos que

$$\sqrt[3]{1,3} = \sqrt[3]{1+3\cdot 0,1} \simeq 1 + 1\cdot 0.1 + \frac{-2}{2!}0.1^2 + \frac{10}{3!}0.1^3 = 1.0917$$

siendo el error dado por

$$Error = |R| = \left|\frac{f^{IV}(c)}{4!}0,1^4\right| = \frac{80}{4!(1+3c)^{11/3}}0,1^4 < \frac{80}{4!(1+3\cdot 0)^{11/3}}0.1^4 = 3.3333\times 10^{-4}$$

puesto que $0 < c < 0,1$.