Asignatura: MATEMÁTICAS I

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales. Primer Curso. Grupo A

1^{er} Parcial. Curso 2011/2012. (24/01/2012)

1. **Sea** $f : R^3 \to R^3$ **una aplicación lineal que verifica:**
   - ◇ **Ker(f)** $=\left\{(x,y,z) : 3y+z=0,\ 2x-y+z=0\right\}$
   - ◇ $\mathbf{f}(1,0,1)=(1,1,-1)$
   - ◇ $(0,1,-1)$ **es un vector propio de valor propio** $\lambda=2$

   Calcular:

   1.a **La matriz de** f **respecto de las bases canónicas.**

   1.b **La dimensión y las ecuaciones del núcleo y de la imagen de** f **y estudiar la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.**

   1.c **La matriz de** f **respecto de las bases** B_1 **de** R^3 **y** B_2 **de** R^3**, siendo**

$$B_1=\{(1,1,0),(1,0,-1),(0,-1,1)\}$$
$$B_2=\{(1,0,-1),(0,-1,1),(0,2,1)\}$$

Solución:

(1.a) Representaremos por A a la matriz buscada, que inicialmente supondremos que viene dada por

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

y vamos a calcular todos estos coeficientes usando las condiciones que sabemos que verifica f :

- Como

$$Ker(f)=\left\{(x,y,z) : 3y+z=0,\ 2x-y+z=0\right\}=\left\{(x,y,z) : z=-3y,\ x=2y\right\}=$$
$$=\{(2y,y,-3y)\}=<(2,1,-3)>$$

  esto significa que $f(2,1,-3)=(0,0,0)$ o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  que nos da lugar a un sistema de 3 ecuaciones con 9 incógnitas.

- De $f(1,0,1)=(1,1,-1)$ se obtiene otro sistema de 3 ecuaciones con 9 incógnitas

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Como $(0,1,-1)$ es un vector propio de valor propio $\lambda=2$, esto quiere decir que $f(0,1,-1)=2(0,1,-1)$, o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo entonces los sistemas por separado

$$\begin{cases} 2a_1 + b_1 - 3c_1 = 0 \\ a_1 + c_1 = 1 \\ b_1 - c_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_2 + b_2 - 3c_2 = 0 \\ a_2 + c_2 = 1 \\ b_2 - c_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_3 + b_3 - 3c_3 = 0 \\ a_3 + c_3 = -1 \\ b_3 - c_3 = -2 \end{cases}$$

se llega a

$$a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{2}; \qquad a_2 = 0,\ b_2 = 3,\ c_2 = 1; \qquad a_3 = 0,\ b_3 = -3,\ c_3 = -1$$

por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1.b) En el apartado anterior tenemos dada una base para $Ker(f)$ y sus ecuaciones vienen dadas en el enunciado. Así ya sabemos que su dimensión es 1 (por lo que f no puede ser inyectiva) y que la dimensión para la $\mathrm{Im}(f)$ será 2 (por lo que f no será suprayectiva). Además,

$$\mathrm{Im}(f) =< (1/2,0,0),(1/2,3,-3),(1/2,-3,-1) >=< (1/2,0,0),(1/2,3,-3) >$$

Para hallar sus ecuaciones, planteamos el sistema dado por

$$(x,y,z) = \alpha(1/2,0,0) + \beta(1/2,3,-3)$$

eliminamos α y β y resultará $y + z = 0$. Por tanto, $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) : y + z = 0\}$

(1c.) Aplicamos el esquema tradicional

$$\underset{B_1}{R^3} \xrightarrow{Id} \underset{C}{R^3} \xrightarrow{f} \underset{C}{R^3} \xrightarrow{Id} \underset{B_2'}{R^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_{B_1,B_2'}(f) = M_{C,B_2}(Id) \times M_C(f) \times M_{B_1',C}(Id)$$

es decir

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

2. **Dada la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.a **Estudiar, en función de los valores de a y b cuando es diagonalizable.**

2.b **Para el caso $a = b = 0$, ¿A es diagonalizable?. En caso afirmativo, hallar la matriz diagonal y las matrices de cambio de base**

2.c **Calcular A^n en este último caso.**

Solución:

(2.a) Los valores propios de la matriz son $\lambda_1 = a,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,$ por lo que si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la matriz será diagonalizable (por tener 3 valores propios diferentes). Estudiemos por tanto lo que ocurre si $a = 1$ y si $a = 2$:

- Si $a = 1,$ los valores propios son $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 2.$ Calculemos el subespacio propio S_{λ_1} asociado a $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

lo que nos lleva a que $z = 0$ y a que $by = 0$. Así, si $b = 0$, tendremos como solución de este sistema $z = 0$, por lo que

$$S_{\lambda_1} =< (x,y,0) >=< (1,0,0),(0,1,0) >$$

que tiene dimensión 2, por lo que A será diagonalizable. Sin embargo, si $b \neq 0$, tendremos que $y = 0,$ por lo que la solución del sistema será $y = z = 0$, por lo que

$$S_{\lambda_1} =< (x,0,0) >=< (1,0,0) >$$

que tiene dimensión 1 y A no es diagnonalizable.

- Si $a = 2$, con un razonamiento similar al anterior se llega a que si $b = 0$ la matriz es diagonalizable, mientras que si $b \neq 0$, no es diagonalizable.

(2.b) Para el caso $a = b = 0$, como $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la matriz será diagonalizable (por el apartado anterior), y si calculamos los vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,$ tendremos:

- S_{λ_1} :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de donde resulta $S_{\lambda_1} =< (x,0,0) >=< (1,0,0) >$.

- De forma similar obtendremos $S_{\lambda_2} =< (0,y,0) >=< (0,1,0) >$ y $S_{\lambda_3} =< (0,2z,z) >=< (0,2,1) >.$ Por tanto, A es diagonalizable siendo su matriz de paso P y su matriz diagonal D, tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D,$ las dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.c) Como sabemos, se tiene que $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$, por lo que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

---

3. **En R^3 se considera el producto escalar definido por**

$$(x,y,z)\cdot(x',y',z') = 2xx' + 3yy' + zz'$$

Con esta definición, se pide:

3.a **Hallar una base ortonormal del subespacio** $W = <(1,2,-1),(0,-1,1)>$ **y otra para** $W^{\perp}$**.**

3.b **Determinar la proyección ortogonal del vector** $(-1,2,-2)$ **sobre** $U = \{(x,y,z) : x-y+2z=0\}$.

Solución:

(3.a) Hallaremos en primer lugar una base ortogonal para W (por método de G-S):

$$u_1 = e_1 = (1,2,-1)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1\cdot e_2}{u_1\cdot u_1}u_1 = (0,-1,1) - \frac{-7}{15}(1,2,-1) = \left(\frac{7}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{8}{15}\right)$$

donde se ha tenido en cuenta que $u_1\cdot e_2 = (1,2,-1)\cdot(0,-1,1) = -7$ y que $u_1\cdot u_1 = 15$. Por tanto, la base ortonormal para W será la dada por $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}\right\}$, donde

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1\cdot u_1} = \sqrt{15}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2\cdot u_2} = \frac{\sqrt{165}}{15}$$

Veamos como hallar una base para $W^{\perp}$: Si $(x,y,z)\in W^{\perp}$, ha de ser

$$\left\{\begin{array}{l}(x,y,z)\cdot(1,2,-1) = 0\\(x,y,z)\cdot(0,-1,1) = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+6y-z = 0\\-2y+z = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 2y\\z = 2y\end{array}\right.$$

por lo que $W^{\perp} = <(2y,y,2y)> = <(2,1,2)>$ y solo hemos de dividir este vector por su módulo (que vale $\sqrt{15}$) para tener la base buscada.

(3.b) Se trata de poner $(-1,2,-2) = u+v$, donde $u\in U$ y $v\in U^{\perp}$, siendo el valor del vector u la proyección pedida. Al ser $u\in U = \{(x,y,z) : x-y+2z=0\} = <(1,1,0),(0,2,1)>$ y $v\in U^{\perp}$, se tiene

$$(-1,2,-2) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,1) + v$$

por lo que para hallar α y β multiplicaremos escalarmente (usando el producto escalar definido en el enunciado) por los vectores de U :

$$\left\{\begin{array}{l}(-1,2,-2)\cdot(1,1,0) = \alpha(1,1,0)\cdot(1,1,0) + \beta(0,2,1)\cdot(1,1,0) + v\cdot(1,1,0)\\(-1,2,-2)\cdot(0,2,1) = \alpha(1,1,0)\cdot(0,2,1) + \beta(0,2,1)\cdot(0,2,1) + v\cdot(0,2,1)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}4 = 5\alpha + 6\beta + 0\\10 = 6\alpha + 13\beta + 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha =\\\beta =\end{array}\right.$$

por lo que la proyección pedida es

$$u = \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,1) =$$

– –

4. **Calcular:**

4.a **Los siguientes límites:**

$$(4.a.1)\ \lim_{x\to 1}(2x-2)^{\sin(x-1)} \qquad (4.a.2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\left(\frac{n}{n^3+2}\right)\right)^{\frac{1}{\sin\left(1/n^2\right)}}$$

4.b **El valor aproximado para $\sqrt{\frac{2}{3}}$ usando un polinomio de Taylor de grado** 2 **para la función** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$**. Estimar el error cometido en dicha aproximación.**

Solución:

(4.a.1) Este límite es de la forma 0^0 por lo que lo resolveremos usando $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\log(f(x))}$:

$$\lim_{x\to 1}(2x-2)^{\sin(x-1)} = e^{\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\log(2x-2)}$$

Si resolvemos aparte el límite que aparece en el exponente:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\log(2x-2) = \lim_{x\to 1}(x-1)\log(2x-2) = \lim_{x\to 1}\frac{\log(2x-2)}{\frac{1}{(x-1)}}$$

donde en la primera igualdad hemos aplicado la equivalencia $\sin(x-1) \sim (x-1)$ (ya que $x-1$ tiene límite 0 cuando $x \to 1$) y en la segunda igualdad hemos transformado el límite para que nos quede la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando entonces la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(2x-2)}{\frac{1}{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{2x-2}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1} -(x-1) = 0$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 1}(2x-2)^{\sin(x-1)} = e^0 = 1$$

(4.a.2) Este límite es de la forma 1^∞ por lo que lo resolveremos usando $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)(f(x)-1)}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\left(\frac{n}{n^3+2}\right)\right)^{\frac{1}{\sin\left(1/n^2\right)}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sin\left(1/n^2\right)}\left(1+\tan\left(\frac{n}{n^3+2}\right)-1\right)}$$

Si resolvemos aparte el límite que aparece en el exponente, y tenemos en cuenta que $\sin(1/n^2) \sim (1/n^2)$ (ya que $(1/n^2)$ tiene límite 0 cuando $n\to\infty$) y que $\tan\left(\frac{n}{n^3+2}\right) \sim \left(\frac{n}{n^3+2}\right)$ (idem para $\left(\frac{n}{n^3+2}\right)$), se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sin(1/n^2)}\left(1+\tan\left(\frac{n}{n^3+2}\right)-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n^2}\,\frac{n}{n^3+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+2} = 1$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tan\left(\frac{n}{n^3+2}\right)\right)^{\frac{1}{\sin\left(1/n^2\right)}} = e^1 = e$$

(4.b) Para que la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ dé el valor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ hemos de dar a x el valor $x = \frac{1}{2}$. Por tanto, para resolver la cuestión planteada, desarrollaremos la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ mediante un polinomio de Mclaurin de segundo grado (el resto irá en grado tres), usaremos este polinomio para valorar aproximadamente $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (sustituyendo en el mismo la x por $\frac{1}{2}$) y acotaremos el resto: De

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

resulta

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)x + \frac{3/4}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

por lo que dando a x el valor $x = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{2} + \frac{3/4}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{27}{32}$$

siendo el error cometido el dado por

$$\text{Resto} = \left|\frac{1}{3!}f'''(c)\left(\frac{1}{2}\right)^3\right| = \left|\frac{1}{3!}\left(\frac{-15}{8\sqrt{(1+c)^7}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3\right|; \qquad \left(0 < c < \frac{1}{2}\right)$$

Por tanto

$$\text{Resto} = \frac{1}{3!}\left(\frac{15}{8\sqrt{(1+c)^7}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{1}{3!}\left(\frac{15}{8\sqrt{(1+0)^7}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{15}{384} = \frac{5}{128}$$

– –

5. **Calcular las siguientes integrales**

$$\text{(5.a)} \int \frac{dx}{1+\cos x + \sin x} \qquad \text{(5.b)} \int \frac{5}{x^2+6x+10}dx$$

Solución:

(5.a) Haremos la sustitución general $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. De esta forma sabemos que $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. Entonces

$$\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t} = \int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \log(1+t) + cte = \log\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + cte$$

(5.b) El polinomio $x^2+6x+10 = 0$ solo tiene raíces complejas conjugadas, por lo que esta integral dará lugar a un arctan( ) una vez que completemos cuadrados en el denominador. Así, se tiene

$$\int \frac{5}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{5}{(x+3)^2+1}dx = 5\arctan(x+3) + cte$$

– –