Ejercicios Tema 13: ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Determinar si el teorema de existencia y unicidad de la solución implica que los siguientes PVI tienen solución única:

a. $y' = x^3 - y^3$; $y(0) = 6$.

b. $y' + \cos(y) - \sin(x) = 0$; $y(\pi) = 0$.

c. $y \cdot y' = 4x$; $y(0) = 0$.

2. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales de 1er orden:

a. $(1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0$.

b. $y' + \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

c. $(1+e^{x/y})dx + e^{x/y}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$.

d. $(x^2+y^2)dx - yxdy = 0$.

e. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

f. $y' = \frac{y+x-1}{3x-y+5}$.

g. $y' = \frac{x-y+3}{2y-2x+1}$.

h. $(2x + \frac{1}{y})dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$.

i. $(\sin(y) + y\sin(x) + \frac{1}{y})dx + (x\cos(x) - \cos(x) + \frac{1}{y})dy = 0$.

j. $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$.

k. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$.

l. $(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + x^2ydy = 0$.

m. $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$.

n. $(\log(x) + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$.

o. $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy =$, sabiendo que admite un factor integrante que depende de $z = x + y^2$.

3. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales :

a. $y' = y - \log(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}$.

b. $y' - \frac{1}{x} = x^2$.

c. $xy' - y = y^2\sin(x)$.

d. $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{(x+1)^3y^2}{2}$.

e. $y' - y + 2y^2e^x = 0$.

f. $y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$, sabiendo que $y_1 = -x$ es una solución particular.

g. $y' + y^2\sin(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos(x)}$, sabiendo que $y_1 = \frac{1}{\cos(x)}$ es una solución particular.

h. $y = 2xy' + \sin(y')$.

4. Resolver los siguientes PVI:

a. $x\sin(y)dx + (x^2+1)dy = 0$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

b. $(x^2y - y^3)dx - x^3dy = 0$; $y(1) = 2$.

c. $xy' = y + xe^{y/x}$; $y(1) = \log(2)$.

d. $(ye^{2x} - 3xe^{2y})dx + \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 3x^2e^{2y} - e^y\right)dy = 0$; $y(1) = 0$.

e. $2(y\sin(2x) + \cos(2x))dx - \cos(2x)dy = 0$; $y(\pi) = 0$.

f. $(x^2 + 1)y' + 4xy = x$; $y(2) = 1$.

5. Integrar las siguientes edo's lineales de orden superior y homogéneas:

a. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

b. $y'' + y' + y = 0$.

c. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

d. $y'' + 5y' - 6y = 0$.

e. $y'' + y' + 2y = 0$.

f. $y'' + 2y' + y = 0$.

g. $y^{(6)} + y^{(4)} = 0$.

h. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

i. $y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$.

j. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$.

k. $x^2y'' + \frac{11}{3}xy' - y = 0$.

6. Integrar las siguientes edo's lineales de orden superior y no homogéneas:

a. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

b. $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$.

c. $y'' - 3y' + 2y = \cos(3x)$.

d. $y'' - 7y' + 10y = 2x^2$.

e. $y'' + 3y' + 2y = e^x + \sin(x)$.

f. $y''' - 3y' + 2y = x^2e^x$.

g. $y'' - 4y' = \cos(x) + \sin(x)$.

7. Resolver los siguientes PVI:

a. $y'' + 2y' - y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -1$.

b. $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

c. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 2$.

d. $3x^2y'' + 11xy' - 3y = 8 - 3\log(x)$; $y(1) = 1$; $y'(1) = \frac{4}{3}$.

8. Resolver las siguientes edo's:

a. $y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$.

b. $y'' - y = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$.

9. Integrar los siguientes sistemas homogéneos de edo's lineales:

a. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = -y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

d. $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -4x - y \end{cases}$

e. $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases}$

f. $X' = AX$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.