

Ejercicios Tema 12: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

1. Calcular las siguientes integrales dobles:

- $\iint_D xy dx dy$, siendo $D = [0, 1] \times [1, 4]$.
- $\iint_D ye^x dx dy$, siendo $D = [-1, 1] \times [0, 2]$.
- $\iint_D y \cos x dx dy$, siendo $D = [0, \pi] \times [1, 2]$.
- $\iint_D y \arctan x dx dy$, siendo $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
- $\iint_D x dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$, siendo D el interior del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$.
- $\iint_D xy dx dy$, siendo D el interior del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.
- $\iint_D \sqrt{4 - y^2} dx dy$, siendo D el recinto limitado por las curvas $y^2 = 2x$ e $y^2 = 2x - 8$.
- $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, siendo D el recinto limitado por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.
- $\iint_D e^{xy} dx dy$, siendo D el recinto limitado por la curva $y^2 = x$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$.

2. Calcular las siguientes integrales dobles mediante un cambio a coordenadas polares:

- $\iint_D \exp(x^2 + y^2) dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- $\iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$, siendo D el recinto comprendido entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.
- $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, siendo D la parte del círculo unidad que está en el primer cuadrante.
- $\iint_D \exp(x^2 + y^2) dx dy$, siendo D la parte del círculo unidad que está en el tercer y cuarto cuadrante.

3. Calcular, mediante integración doble, el área de los siguientes conjuntos :

- El círculo de radio R .
- El área encerrada por una elipse de semiejes a y b .
- El área del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.
- La región comprendida entre la recta $x + y = 5$ y la curva $xy = 6$.

4. Calcular las siguientes integrales triples:

- $\iiint_V y \exp(x + z) dx dy dz$ siendo $V = [0, 2] \times [-1, 1] \times [1, 2]$.
- $\iiint_V xyz dx dy dz$ siendo $V = [1, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- $\iiint_V xy \cos z dx dy dz$ siendo $V = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, \pi]$.
- $\iiint_V z dx dy dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
- $\iiint_V y^2 dx dy dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

f. $\iiint_V (x + y + z^3) dx dy dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

5. Calcular el volumen de los siguientes conjuntos mediante integración triple:

- a. El volumen de una esfera de radio R .
- b. El volumen de un cilindro de radio R y altura h .
- c. El volumen de un cono de radio R y altura h .

6. Calcular las siguientes integrales triples mediante un adecuado cambio de variables:

- a. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \leq 0\}$.
- b. $\iiint_V \exp \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.
- c. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
- d. $\iiint_V \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$.
- e. $\iiint_V y dx dy dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, -1 \leq z \leq 1\}$.