EJERCICIOS TEMAS 10 y 11: CÁLCULO DIFERENCIAL

EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LÍMITES, CONTINUIDAD, DERIVABILIDAD Y DIFERENCIABILIDAD

1. Dada la función

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},$$

con $f(0,0) = 0$, deteminar si dicha función es continua y diferenciable.

2. Dada la función

$$f(x,y) = \frac{4x^3}{x^2+y^2},$$

con $f(0,0) = 0$, deteminar si dicha función es continua y diferenciable.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\operatorname{sen}(x \cdot y) & \text{si } x \neq 0 \\ g(y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3.a ¿Es posible determinar $g(y)$ para que la función $f(x,y)$ sea continua en todos los puntos tales que $x = 0$?

3.b Establecer $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

4. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+|y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4.a Estudiar para qué valores de α la función $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

4.b Estudiar para qué valores de α existen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4.c Estudiar para qué valores de α la función $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

5. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

estudiar su continuidad y diferenciabilidad en $(0,0)$.

6. Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{(x^2-y)^2+x^6} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide:

6.a Estudiar su continuidad y diferenciabilidad en $(0,0)$.

6.b Calcular $D_v f(0,0)$ siendo $v = (1,2)$.

FÓRMULA DE TAYLOR Y APLICACIONES

7. Se considera el conjunto de triángulos isósceles inscritos en la elipse $x^2 + 3y^2 = 12,$ con vértice fijo en $(0,-2)$ y base paralela al eje $0X$. Hallar los triángulos de área máxima y mínima.

8. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el recinto

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\right\}$$

9. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ condicionados por

$$\left.\begin{array}{r} 3x^2 + y^2 + 6z^2 = 1 \\ \\ -y + z = 0 \end{array}\right\}$$

10. Dada la función

$$F(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{t^2} dt,$$

se pide:

10.a Estudiar su continuidad y diferenciabilidad.

10.b Calcular los extremos relativos.

11. Sea $f(x,y) = x^2 - xy + y^2.$ Obtener los valores extremos de f en el conjunto

$$K = \{(x,y); x^2 + y^2 < 2\}$$

12. (a) Hallar todos los puntos críticos de

$$f(x,y,z) = 6 - 4x - 3y - z(x^2 + y^2 - 1)$$

(b) Hallar y clasificar todos los puntos críticos de

$$f(x,y) = 6 - 4x - 3y - \frac{2}{5}(x^2 + y^2 - 1)$$

13. Se considera la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + x \cdot y - x + y^2.$ Calcular los extremos absolutos de $f(x,y)$ en el semicírculo $A = \left\{x^2 + 2y^2 \leq 1, \ y \geq 0\right\}.$

14. Hallar los extremos absolutos, caracterizándolos, para la función $f(x,y,z) = x+y+z$ sujetos a la condición $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

15. Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

en el recinto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$$

16. Determinar y clasificar los extremos de la función

$$f(x,y,z) = z$$

sujetos a la restricción

$$g(x,y,z) = z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0$$

(Indicación: La única solución de la ecuación $t + e^t = 1$ es $t = 0$).

17. Se considera la función

$$f(x,y) = log(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

Se pide:

17.a Estudiar la diferenciabilidad de f y caso de que sea diferenciable establecer $df(x,y)$.
17.b Determinar y clasificar los extremos relativos de f.
17.c Calcular $f(1,0)$.

TRANSFORMACIONES

18. Demostrar que la ecuación de la elipse $x^2 + 3y^2 = 12$, en el punto $(3,1)$ define una función $y = y(x)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de $y(x)$ en $x = 3$.

19. La ecuación

$$3y^3x^4 - x^2y = 2$$

¿define una función $y = f(x)$ derivable en $x = 1$? Justificar la respuesta y, en caso afirmativo, calcular la ecuación la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 1$.

20. Sea $z = f(x,y)$ la función definida a partir de la expresión implícita

$$3y^3z^2 + e^{x+z} - 3y = e$$

Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, y determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

21. Comprobar que las ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z^2 = 2 \\ yz+xy+zx = 1 \end{cases}$$

definen a y y z como funciones de x tales que $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$. Calcular el desarrollo de Taylor en 0 de orden dos de ambas funciones.

22. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, demostrar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v),$$

siendo $u = x+y$ e $v = x-y$.

23. Demostrar que las ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y-z^2 = 0 \\ xy+z-y = 0 \end{cases}$$

definen a x e y como funciones implícitas de z en los puntos $x = 0$, $y = 2$ y $z = 2$. Calcular además una aproximación de dichas funciones mediante el polinomio de Taylor.

24. Comprobar si la ecuación

$$x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+1 = 0$$

determina una función $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(0,1)$. En caso afirmativo, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ y la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(0,1,f(0,1))$.

25. Se considera la función $z = f(x,y)$ que, en los alrededores del punto $(1,1,1)$, está definida implícitamente por

$$z^3+3x^2\cdot y-y^3\cdot z+y^2-3x-1 = 0$$

Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de tal función en el punto $(1,1)$.

26. Comprobar si la ecuación

$$x\cdot z+y\cdot e^{2x-z} = 2$$

define a z como función implícita de x,y en $(x,y,z) = (1,0,2)$. En caso afirmativo, calcular el gradiente de z en $(1,0)$.

27. Probar que la ecuación

$$z+e^z+2x+2y-x^2-y^2-3 = 0$$

define una función $z = g(x,y)$ en un entorno del punto $(x,y,z) = (1,1+\sqrt{e},1)$. Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie $z = g(x,y)$ en el punto $(1,1+\sqrt{e})$.

28. Sea el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} xu+yvu^2 = 2 \\ xu^3+y^2v^4 = 2 \end{cases}$$

y considérese el punto $P(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$.

28.a Probar que en un entorno de P el sistema define, de forma implícita, a u y v como funciones de x e y.

28.b Encontrar una expresión formal para el jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

28.c Calcular el jacobiano anterior en el punto $(1,1)$. Indíquese cual es el valor de $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$.

PROBLEMAS VARIOS

29. Calcular los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 1$$

30. Sean α y β dos números reales. Probar que la ecuación

$$\operatorname{sen}(\alpha x + \beta y + z) \cdot e^z = 0$$

define una función implícita $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(0,0)$, con $z(0,0) = 0$. Determinar los valores de α y β para los que se verifican

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -3$$

31. Sea

$$g(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\,dt$$

31.a Probar que el punto $(1,0)$ es crítico.

31.b Clasificar dicho punto crítico.

31.c Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de $g(x,y)$ en el punto $(1,0)$.

32. Transformar la expresión

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

mediante el cambio de variables dado por

$$x = e^u \quad \text{e} \quad y = e^v$$

33. Determinar los extremos de la función

$$f(x,y,z) = x + z$$

en la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

34. Probar que la relación

$$x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$$

define, en un entorno de $x = 0$, una función implícita $y = f(x)$, con $f(0) = 1$. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x)$ en $x = 0$.