EJERCICIOS TEMA 9: CÁLCULO INTEGRAL EN UNA VARIABLE

PROBLEMAS DE EXÁMENES

1. Expresar el siguiente límite como una adecuada integral definida, y calcularla:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)$$

2. Calcular

$$\int \frac{dx}{3\cos x - 4\operatorname{sen} x}$$

3. Calcular

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+5}$$

4. Sea la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4.a Hallar el área determinada por las rectas $x = 0$, $x = t$, el eje $0X$ y $f(x)$.

4.b Calcular el volumen obtenido al girar la región anterior alrededor de $y = 0$.

4.c ¿Cuales son los valores correspondientes del área y del volumen anteriores si hacemos $t \to +\infty$.

5. Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}(t^2)\,dt}{x^6}$$

6. Calcular las siguientes integrales

$$a)\quad \int \frac{(x+1)^2}{x^3+x}\,dx$$

$$b)\quad \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^3 x\, dx$$

7. Calcular el área de la región plana comprendida entre el eje x, la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{-x}{1+x^4}$$

y limitada lateralmente por las rectas $x = \pm 1$.

8. Hallar el área encerrada por las curvas $y = \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}$ e $y = e^{1-|x|}$, sabiendo que se cortan en $x = \pm 1$.

9. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen}(t^2)dt}{x^2}$$

10. Calcular

$$\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2-4x}}dx$$

11. Calcular

$$\int \frac{x \cdot lnx}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

12. Se considera la función $f(x) = \operatorname{tg}x$ para $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

12.a Calcular las primitivas de la función $f(x)$.

12.b Hallar la longitud de la curva $y = F(x)$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$.

12.c Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}x dx$$

13. Calcular

$$\int \frac{dx}{1+2\cdot \operatorname{tg}x}$$

14. Sea R la región plana delimitada por las gráficas de $y = 0, y = \sqrt{5}, x = 0, x = y^2$.
Determinar el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje Y, mediante los dos siguientes métodos:

14.a Por secciones planas.

14.b Como un sólido de revolución.

15. Calcular el siguiente límite (expresándolo como una adecuada integral de Riemann):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \ldots + \sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}$$

16. Sea R la región plana delimitada por la gráfica de la función $f(x) = (\log x)^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 1,\ x = e$. Se pide:

16.a Calcular el área de R.

16.b Calcular el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje Y.

17. Calcular la integral

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{(x-1)^3}}dx$$

18. Calcular, en el primer cuadrante, el área comprendida entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

19. Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+6}}$$

20. Calcular el área de los dos recintos en que la región limitada por la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

queda dividida mediante la circunferencia de centro $(0,-3)$ y radio 5.

21. Calcular la integral

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$$

22. Usando la definición de integral definida, calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{3^2}{n^3+3^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$$