Definición 5.14. Sea $f{:}I\to\mathbb{R}$. Se dice que f es *uniformemente continua en I* si se verifica que para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para todo par de puntos $x_1,x_2\in I$, de modo que $|x_1-x_2|<\delta$, se verifica que $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Observación. La continuidad uniforme es una propiedad relativa a todo I, es decir, es una propiedad global. El δ que aparece en la definición depende sólo de ε y no de ningún punto de I.

Es evidente que si una función $f{:}I\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua en I, entonces f es continua en I. El recíproco, en general, no es cierto, como puede observarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.16. La función $f{:}(0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}$ es continua en $(0,1]$ (al ser un cociente en el que el denominador no se anula en dicho intervalo). Sin embargo f no es uniformemente continua en $(0,1]$:

Si se toma $\varepsilon=1$ y cualquiera que sea $\delta>0$, tomando $n\in\mathbb{N}$ tal que $n>1/\delta$, los puntos $x_1=\frac{1}{n}$ y $x_2=\frac{1}{n+1}$ pertenecen a $(0,1]$ y se verifica que $|x_1-x_2|<\delta$, pero

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|n-(n+1)|=1.$$

La siguiente proposición (cuya demostración puede verse en *&7.6 Férnandez Viña*) muestra condiciones suficientes para la continuidad uniforme.

Proposición 5.21. (Teorema de Heine). Una función continua definida en un subconjunto compacto I de $\mathbb{R}$, es uniformemente continua en I.

9. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Problema 1. Aplicando la definición de límite, comprobar que:

(1.a) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)=8$

(1.b) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)=0$

(1.c) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ si $f(x)=mx+n$

(1.d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{2}$

Problema 2. Estudiar los límites laterales de las siguientes funciones:

(2.a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ en $x=2$.

(2.b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+x}$ en $x=0$.

(2.c) $f(x)=\dfrac{2(x-1)+|x-1|}{4(x-1)-3|x-1|}$ en $x=1$.

(2.d) $f(x)=exp\left(\dfrac{|x|}{x}\right)$ en $x=0$.

(2.e) $f(x)=exp\left(\dfrac{-1}{x}\right)$ en $x=0$.

(2.f) $f(x)=\dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}}$ en $x=0$.

Problema 3. Determinar los límites de las siguientes expresiones:

(3.a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(3.b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(3.c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(3.d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

(3.e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$

(3.f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

(3.g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$

(3.h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$

(3.i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

(3.j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

(3.k) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ (3.l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$

(3.m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (3.n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{(n+1)/2}}$

(3.ñ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (3.o) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

Problema 4. Calcular los siguientes límites:

(4.a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^2}\right)$ (4.b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(a+x)-sen(a-x)}{x}$

(4.c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ (4.d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(log(x+a)-log(x-a)\right)$

(4.e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen\left[tg\left(sen(x-1)\right)\right]}{sen\left(tg(x-1)\right)}$ (4.f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{sen^2(x)} - \dfrac{1}{1-cos(x)}\right)$

(4.g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(cos(ax)\right)^{x^{-2}}$ (4.h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+sen(x)}-\sqrt{1-sen(x)}}{x}$

(4.i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$ (4.j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a^x-1)log(1-x^2)}{\left[(1-x^2)^m-1\right]arcsen(x)}$

(4.k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(ax)}{x(x-2)tg(bx)}$ (4.l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(cos(4x)+sen^2(2x)\right)^{5/x^2}$

(4.m) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{2}-1\right)$ (4.n) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}-x$

(4.ñ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(arctg(x)\right)^{1/\log(x)}$ (4.o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1-cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)\left(2^{sen(x)}-1\right)}{\left(1+tg^3\left(\frac{x}{2}\right)\right)^5-1}$

(4.p) $\lim\limits_{x\to\infty} log\left(\dfrac{(x+2)^{x+2}x^x}{\left((x+1)^{x+1}\right)^2}\right)$ (4.q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a^x-1)\left(log(1+x^3)+sen(x^4)+x^5\right)}{log\left(cos(x)\right)arcsen^2(x)}$

Problema 5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

(5.a) $f(x)=\dfrac{3}{4+4^{tg(x)}}$ (5.b) $f(x)=\dfrac{9^{1/x}-1}{9^{1/x}+1}$ (5.c) $f(x)=\dfrac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x}+1}$

(5.d) $f(x)=|2x^2-x-1|$ (5.e) $f(x)=x\,|1+x^{-1}|$ (5.f) $f(x)=e^{1/sen(x)}$

(5.g) $f(x)=\dfrac{x^2}{sen^3(x)}$ (5.h) $f(x)=|x+2|+|x-4|$

Problema 6. Determinar la continuidad de las funciones siguientes:

(6.a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\,log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } -1<x<1 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ (6.b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<-2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } -2<x<2 \\ 7 & \text{si } 2\le x \end{cases}$

$$(6.c)\ f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x<-1 \\ \log(2-x^2) & \text{si } -1<x<1 \\ \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} & \text{si } 1<x \end{cases} \qquad (6.d)\ f(x)=\begin{cases} |x+3| & \text{si } -5\leq x \\ x^2+9x+22 & \text{si } x<-5 \end{cases}$$

Problema 7. Dadas las funciones $f(x)=x+5$, $g(x)=|x|x^{-1}$ si $x\neq 0$, y $g(0)=1$, estudiar la continuidad de las funciones $g\circ f$ y $f\circ g$.

Problema 8. Sea la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x\leq c \\ (ax+b)^2 & \text{si } c<x \end{cases}$$

donde a, b y c son constantes. Considerando b y c fijos, determinar los valores de a para que la función f sea continua en el punto c.

Problema 9. Hallar los valores de a para que la siguiente función sea continua

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1} & si\ 0<x<1 \\ \log\left(\cos^2(x-a)+1\right) & si\ 1\leq x \end{cases}.$$

Problema 10. Demostrar la veracidad de los siguientes apartados:

(10.a) La ecuación $senx-x+1=0$ tiene al menos una raíz.

(10.b) Existe un punto $x\in\mathbb{R}$ tal que $3x-2=\cos(x)$.

(10.c) Todo polinomio de grado impar posee al menos una raíz real.

Problema 11. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas de modo que se cumple que $f(a)<g(a)$ y $f(b)>g(b)$. Demostrar que $f(x)=g(x)$ para algún $x\in(a,b)$.

Problema 12. Determinar los valores del número real k para que la función $P(x)=x^3-3x+k$, se anule en algún punto del intervalo $[-1,1]$.

SOLUCIONES.

2.a. $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$. **2.b.** $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$.

2.c. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1/7$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$. **2.d.** $\lim_{x\to 0^-} f(x)=e^{-1}$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=e$.

2.e. $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$. **2.f.** $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-1$.

3.a. 1. **3.b.** $2/3$. **3.c.** $1/2$. **3.d.** 6. **3.e.** 10. **3.f.** $\dfrac{nm(n-m)}{2}$.

3.g. $1/4$. **3.h.** $-1/2$. **3.i.** $49/24$. **3.j.** 5^{-5}. **3.k.** $(3/2)^{10}$.

3.l. $\dfrac{n(n+1)}{2}$. **3.m.** m/n. **3.n.** $n^{-n(n+1)/2}$. **3.ñ.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3.o. $\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$.

4.a. *No existe.* **4.b.** $2\cos a$. **4.c.** $3/2$. **4.d.** $2a$. **4.e.** 1. **4.f.** $-\infty$.

4.g. $\exp(-a^2/2)$. **4.h.** 1. **4.i.** $2\log(a)$. **4.j.** $\log(a)/m$.

4.k. $-a^2/(4b)$. **4.l.** e^{-20}. **4.m.** $\log(2)$. **4.n.** $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. **4.ñ.** e.

4.o. $4\log(2)/45$. **4.p.** 0. **4.q.** $-2\log(a)$

5.a. *Discontinua de salto 3/4 en los puntos* $x=(2n+1)\pi/2$.

5.b. *Discontinua en* $x=0$. **5.c.** *Discontinua de 2ª especie en* $x=0$.

5.d. *Continua en* $\mathbb{R}$. **5.e.** *Discontinua de salto 2 en* $x=0$.

5.f. *Discontinua de salto infinito en* $x=2n\pi$, *y salto menos infinito en* $(2n+1)\pi$, *donde* $n\in\mathbb{Z}$.

5.g. *Discontinua de 2ª especie en* $x=n\pi$, *donde* $n\in\mathbb{Z}$.

que se conoce habitualmente como *notación de Leibnitz* para expresar las derivadas sucesivas de una función.

7. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Problema 1. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$(1.a)\ f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=1 \\ \dfrac{x-1}{1+e^{1/(x-1)}} & \text{si } x\neq 1 \end{cases}$$

$$(1.b)\ f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x\ arctg\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

$$(1.c)\ f(x)=\left|\sqrt[3]{x}\right|$$

Problema 2. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{2}x|x|$.

(2.a) Estudiar las derivadas laterales de la función f en el cero. ¿Existe $f'(0)$?.

(2.b) Hallar la función derivada de f determinando su dominio.

Problema 3. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x<0 \\ -x^2+2x+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

estudiar la derivabilidad de la función según los valores de a.

Problema 4. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} -2sen(x) & \text{si } x\leq -\pi/2 \\ a\ sen(x)+b & \text{si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ cos(x) & \text{si } \pi/2\leq x \end{cases}$$

estudiar la derivabilidad de la función según los valores de a y b.

Problema 5. Determinar $a,b\in\mathbb{R}$ según $c\in\mathbb{R}$, para que la siguiente función sea derivable

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq c \\ ax+b & \text{si } x>c \end{cases}.$$

Problema 6. Dada la función $f(x)=|x|^3$, demostrar que existen las funciones derivadas de primer y segundo orden, $f'(x)$ y $f''(x)$, para todo valor de x. Probar que no existe $f'''(0)$.

Problema 7. Determinar las funciones f' y f'' a partir de la función

$$f(x)=\begin{cases} -(2x+1) & \text{si } x\leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1<x<0 \\ sen(x) & \text{si } 0\leq x \end{cases}.$$

Problema 8. Calcular la función derivada $f'(x)$ de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2 arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Problema 9. Estudiar la existencia de la derivada de segundo orden en el punto cero de la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1-x^2\left(1-sen\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x\neq 0 \end{cases}.$$

Problema 10. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$(10.a)\ f(x)=\frac{e^{-x^2}arcsen\left(e^{-x^2}\right)}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\,log\left(1-e^{-2x^2}\right)$$

$$(10.b)\ f(x)=\frac{-cos(x)}{2sen^2(x)}+log\sqrt{\frac{1+cos(x)}{sen(x)}}$$

$$(10.c)\ f(x)=exp(e^x)$$

Problema 11. Calcular la derivada *n*-sima de las siguientes funciones:

$(11.a)\ f(x)=xe^x$ $\quad$ $(11.b)\ f(x)=x^{n-1}log(x)$

$(11.c)\ f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $(11.d)\ f(x)=sen^2(x)$

$(11.e)\ f(x)=log\left(\dfrac{x-1}{x^2-4}\right)$ $\quad$ $(11.f)\ f(x)=e^{xcos(a)}cos(xsen(a))$

$(11.g)\ f(x)=ArgTh(x)$ $\quad$ $(11.h)\ f(x)=\left(a^2-b^2x^2\right)^{-1}$

$(11.i)\ f(x)=\dfrac{mx+p}{x^2-a^2}$ $\quad$ $(11.j)\ f(x)=ax^{1/20}+b$

SOLUCIONES.

1.a. *Derivable en* $\mathbb{R}-\{1\}$. **1.b.** *Derivable en* $\mathbb{R}-\{0\}$. **1.c.** *Derivable en* $\mathbb{R}-\{0\}$.

2.a. $f'(0)=0$. **2.b.** $f'(x)=|x|\ \forall x\in\mathbb{R}$.

3. $\exists f'(0) \Leftrightarrow a=2$.

4. *Si* $a=-1$, $b=1$ *es continua en* $\mathbb{R}$ *y derivable en* $-\pi/2$.

5. $b=-c^2$, $a=2c$.

6. $f'(x)=\begin{cases} -3x^2 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 3x^2 & \text{si } 0<x \end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases} -6x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 6x & \text{si } 0<x \end{cases}$.

7. $f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } x\leq -1 \\ 2x & \text{si } -1<x<0 \\ cos(x) & \text{si } 0<x \end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ 2 & \text{si } -1<x<0 \\ -sen(x) & \text{si } 0<x \end{cases}$.

8. $f'(0)=0$ *y* $f'(x)=\dfrac{2xarctg\left(\dfrac{1}{x}\right)}{1+e^{1/x}}+\dfrac{(x^2+1)arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{1/x}-x^2(1+e^{1/x})}{(1+x^2)(1+e^{1/x})}$.

9. *No existe* $f'(0)$, *por tanto* $\nexists\, f''(0)$.

10.a. $f'(x)=\dfrac{-2xe^{-x^2}arcsen\left(e^{-x^2}\right)}{\left(1-e^{-2x^2}\right)^{3/2}}$. **10.b.** $f'(x)=\dfrac{cos^2(x)}{sen^3(x)}$.

10.c. $f'(x)=exp\left(x+e^x\right)$.

11.a. $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$. **11.b.** $f^{(n)}(x)=\dfrac{(n-1)!}{x}$.

11.c. $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{2n-x-1}{x^{(2n+1)/2}}\,\dfrac{1\ 3\ 5\ldots(2n-3)}{2^n}$.

11.d. $f^{(n)}(x)=2^{n-1}sen\left(2x+(n-1)\pi/2\right)$.

Ejemplo 7.5. Sean $f(x)=x^2 sen\frac{1}{x}$, $g(x)=senx$.

Si consideramos el límite de su cociente en $x=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 sen\frac{1}{x}}{senx} = \lim_{x\to 0} xsenx = 0.$$

Pero si este mismo límite se intenta calcular por la regla de L'Hôpital se tendría que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2xsen\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}}{cosx}$$

que no existe, ya que no existe $\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$.

Nota. La regla de L'Hôpital permite, bajo ciertas condiciones, calcular límites de la forma $0/0$ o ∞/∞. Veamos como puede aplicarse al resto de las indeterminaciones:

- Si la indeterminación es del tipo ∞-∞, puede reducirse a una $0/0$ haciendo:

$$f(x)-g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

- Si es del tipo $0\cdot\infty$, puede reducirse a una del tipo $0/0$ haciendo

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

o a una del tipo ∞/∞, haciendo

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

- Si es del tipo 1^∞, 0^0 o ∞^0, estas se reducen a una del tipo $0\cdot\infty$ mediante

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)logf(x)}.$$

5. EJERCICIOS PROPUESTOS

Problema 1. Estudiar la monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:

(1.a) $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ *(1.b)* $f(x)=x^5$ *(1.c)* $f(x)=e^{\cos(x)}$

Problema 2. Determinar los extremos y los intervalos de crecimiento de las funciones:

$$(2.a)\ f(x)=\begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \qquad (2.b)\ f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & \text{si } 0\neq|x|<1 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

$$(2.c)\ f(x)=\begin{cases} cos(x) & \text{si } -\pi/2<x\leq 0 \\ sen(x) & \text{si } 0<x<\pi/2 \end{cases} \qquad (2.d)\ f(x)=\begin{cases} x^3-E(x) & \text{si } -1<x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ sen|x|+1 & \text{si } 0<x<\pi/2 \end{cases}$$

Problema 3. La función $f(x)=\frac{2-x^2}{x^4}$ toma valores iguales en los extremos del intervalo $[-1,1]$. Además $f'(x)$ no se anula en dicho intervalo. ¿Contradice esta función el teorema de Rolle?.

Problema 4. Sea $f(x)=1+x^m(x-1)^n$ siendo $m,n\in\mathbb{N}$. Demostrar que $f'(x)$ posee una raíz en el intervalo $(0,1)$.

Problema 5. Sean $0<a<b$ dos números reales. Demostrar que se verifican las siguientes desigualdades:

(5.a) $\dfrac{b-a}{1+b^2} < arctg(b)-arctg(a) < \dfrac{b-a}{1+a^2}$ (5.b) $1-\dfrac{a}{b} < \log\left(\dfrac{b}{a}\right) < \dfrac{b}{a}-1$

Problema 6. Sea la función $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$. Hallar un punto del intervalo $[-1,2]$ en donde se anula la primera derivada de f.

Problema 7. Sea la función $f(x)=\sqrt{x^2+9}$. Encontrar el punto del intervalo $[0,4]$ determinado por el teorema de los incrementos finitos de Lagrange.

Problema 8. Dadas las funciones $f(x)=sen(x)$ y $g(x)=cos(x)$ definidas en el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$. Aplicar el teorema del valor medio de Cauchy.

Problema 9. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas en un intervalo cerrado $[a,b]$, siendo la función $g(x)\neq 0$ en todo el intervalo, y la función $f(x)$ nula en los extremos del mismo. Además, ambas funciones son derivables en el intervalo abierto (a,b). Probar que existe un punto $c\in(a,b)$ tal que se verifica la expresión

$$f'(c)g(c)=g'(c)f(c).$$

Problema 10. Demostrar que si un polinomio de grado n posee todas sus raices reales, entonces todos los sucesivos polinomios derivados de él poseen todas sus raices reales.

Problema 11. Comprobar que si f y g son dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b), siendo $f(a)=g(a)$ y $f'(x)<g'(x)$ en el abierto (a,b), entonces se tiene que $f(x)<g(x)$ $\forall x\in(a,b)$.

Problema 12. Calcular los siguientes límites:

(12.a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x)-x}{x-senx}$ (12.b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x^2}$ (12.c) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\log(senx)}{(\pi-2x)^2}$

(12.d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg(x)}$ (12.e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+senx-1}{\log(1+x)}$ (12.f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{senx}}{x-senx}$

Problema 13. Encontrar los límites de los apartados siguientes:

(13.a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{cosx-1}$ (13.b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{\sqrt{1-cosx}}$

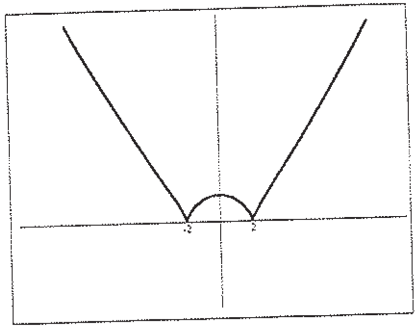
(13.c) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ (13.d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log(x)}$

(13.e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{sen^2x}-\dfrac{1}{x^2}$ (13.f) $\lim\limits_{x\to\pi/2} tg^{sen(2x)}(x)$

(13.g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2arctg(x)}{\pi}\right)^x$ (13.h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{cotg(x)}{x}$

Problema 14. Estudiar la existencia de los siguientes límites. ¿Puede aplicarse la regla de L'Hôpital?.

(14.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-senx}{x+senx}$ (14.b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x}}{x^2}$



6. EJERCICIOS PROPUESTOS.

Problema 1. Calcular aplicando la fórmula de McLaurin el desarrollo en serie de las siguientes funciones:

(1.a) $f(x)=e^{-x}$ (1.b) $f(x)=xe^{ax}$ (1.c) $f(x)=(1-x^2)^{-1}$

(1.d) $f(x)=e^{ax}sen(bx)$ (1.e) $f(x)=Ch(x)$ (1.f) $f(x)=Sh(x)$

Problema 2. Acotar los restos de las funciones:

(2.a) $f(x)=e^x$ en $x=1$ y $x=2$ (2.b) $f(x)=(4+x)^{-1/3}$ en $x=1$

(2.c) $f(x)=(1+2x)^{-1/3}$ en $[0,1/2]$ (2.d) $f(x)=Ch(x)$ en $[-3,3]$

Problema 3. Calcular el valor de $cos^2 1$ con un error inferior a 10^{-4}.

Problema 4. Calcular el grado del polinomio de McLaurin de la función $f(x)=Sh(x)$, para que el error cometido en $[-1,1]$ sea inferior a 10^{-3}.

Problema 5. Calcular los siguientes límites por desarrollos limitados

(5.a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(1+x)-x}{1-cos(x/2)}$ (5.b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}Ch(x)+e^x arcsen(x)-(1+x)}{log(1+x)-\dfrac{3+2x^2}{3-2x^2}+1}$

(5.c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log^2(1+x)-sen^2x}{1-e^{-x^2}}$ (5.d) $\lim\limits_{x\to 0} cotg^2(x)\left(1+\dfrac{x}{2}-x^2-\dfrac{x}{log(1+x)}\right)$

(5.e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cosx-e^{-x^2/2}}{x^4}$ (5.f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(1+x)+exp(-x^2/2)-1-x}{senx-arcsen(x)+x(Ch(3x)-1)}$

(5.g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-tg(\pi x/4)}$ (5.h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2}+xArgTh(x)-1}{log(1+x)-tg(x)+xSh(x/2)}$

(5.i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{-x}}{tgx}$ (5.j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx\ log(1+x^2)+arctg(x)\sqrt[3]{1+x}-x}{tgx+ArgTh(x)-2x-x^2/2}$

(5.k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{senx}$ (5.l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cosx\sqrt{1+x^2}+x^2\left(Ch(x)-\dfrac{12+5x^2}{12-5x^2}\right)}{x(tgx-Sh(x))}$

(5.m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sh(x)+senx-2x}{x(Ch(x)+cosx-2)}$ (5.n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(senx)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

Problema 6. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

(6.a) $y=2+x-x^2$ (6.b) $y=\dfrac{x^3}{2^x}$ (6.c) $y=x+senx$

(6.d) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ (6.e) $y=x^2-log(x^2)$ (6.f) $y=\sqrt{2x-x^2}$

Problema 7. Encontrar los extremos relativos y absolutos de la función $f(x)$ definida para valores $|x|\leq 2$ por

$$f(x)=\frac{1+2xarctg(x)}{1+x^2}$$

donde el $arctg(x)$ es el menor valor positivo de los posibles.

Problema 8. Estudiar la monotonía, puntos extremos y de inflexión de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Problema 9. Estudiar el caracter de monotonía, los puntos extremos y la concavidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{x} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{x}{x^2-1} & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$$

Problema 10. Calcular los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, puntos extremos y puntos de inflexión de la función $f(x)=x^5-75x^3+1620x-1000$. Hallar los máximos y mínimos absolutos en el intervalo $[2,10]$.

Problema 11. Probar que no existe un punto $a\in\mathbb{R}$, tal que la función $f(x)$ definida por $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ posea un máximo relativo.

Problema 12. Encontrar los valores de $a,b,c\in\mathbb{R}$ tales que la función $f(x)=ax^2+bx+c$ pasa por el punto $(1,1)$, posee un mínimo en $x=1$ y cuya tangente en $x=2$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Problema 13. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } x\leq 0 \\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Hallar a y b sabiendo que la función es continua en $x=0$ y posee un mínimo en $x=2$. Calcular las asíntotas de la curva $y=f(x)$.

Problema 14. Encontrar el triángulo rectángulo de área máxima cuya hipotenusa mide $4cm$.

Problema 15. En un depósito cónico de $10m$ de diámetro y un ángulo cónico de $\pi/2$, lleno de agua, se introduce un prisma recto de base cuadrada. Determinar el lado a del cuadrado de la base y la altura b, de forma que el volumen de agua desalojada del cono sea máximo.

Problema 16. Hallar el trapecio de area máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio R. Hallar dicha área.

Problema 17. En una central nuclear se quiere construir un depósito cilíndrico abierto de hormigón con capacidad para $3140m^3$. Las paredes y el fondo del depósito deberán tener un espesor de $1m$. Determinar las dimensiones del cilindro para gastar la menor cantidad de hormigón posible.

Problema 18. De un tronco de árbol de forma troncocónica, con bases de $1m$ y $2m$ de diámetro respectivamente, se quiere cortar una viga de sección transversal cuadrada con volumen máximo. Hallar las dimensiones de la viga sabiendo que la altura del tronco es de $20m$

Problema 19. La sección transversal de una viga tiene forma rectangular de longitud L y anchura W. Suponiendo que la resistencia de la viga es directamente proporcional a W^2L. ¿Cuales son las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco redondo de diámetro D?.